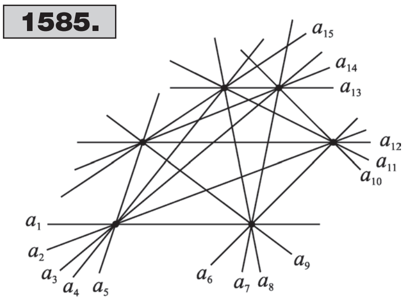
II. Térgeometria

Térelemek

Illeszkedési feladatok

1585. *a)* 4 pont 6 egyenest határoz meg. *b)* 5 pont 10 egyenest határoz meg. *c)* 6 pont 15 egyenest határoz meg. *d)* n pont $\underline{\underline{n \cdot \frac{n-1}{2}}}$ egyenest határoz meg.

1585.



1586. Összesen $\underline{\underline{14}}$ egyenest.

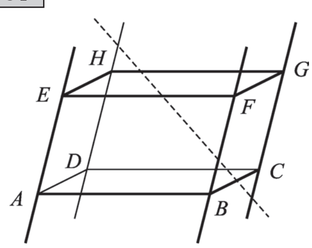
1587. Jelöljük az a pont egyenesét e-vel, a b pont egyenesét f-fel. e egyenes pontjai egymással $\Rightarrow 1$ egyenes. f egyenes pontjai egymással $\Rightarrow 1$ egyenes. 1 pont az e egyenesről az f egyenes pontjaival $\Rightarrow b$ darab egyenes. a darab pont az e egyenesről az f egyenes pontjaival $\Rightarrow ab$ darab egyenes. Összesen: $\underline{\underline{(a \cdot b + 2)}}$ darab egyenes.

1588. *a)* Az A, B, C, D pontok $\underline{\underline{4}}$ síkot határoznak meg: $[ABC]$; $[ABD]$; $[BCD]$; $[ACD]$. *b)* Az A, B, C, D, E pontok $\underline{\underline{10}}$ síkot határoznak meg: $[ABC]$; $[ABD]$; $[BCD]$; $[ACD]$; $[ABE]$; $[BCE]$; $[ACE]$; $[ADE]$; $[BDE]$; $[CDE]$. *c)* Az első pontot 6-féleképpen, a másodikat 5-féleképpen, a harmadikat 4-féleképpen választhatom. $6 \cdot 5 \cdot 4$-féle sorrend szerint választhatunk. A pontok sorrendje nem számít a sík meghatározása szempontjából, így a fenti lehetőségek számát osztjuk a három pont egymás közti lehetséges sorrendjeinek számával. $\frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = \underline{\underline{20}}$-féle sík lehetséges. *d)* n pontból $n \cdot (n-1) \cdot (n-2)$ a lehetséges kiválasztási sorrend. $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ a három pont egymás közti sorrendje. $\underline{\underline{\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{6}}}$-féle sík lehetséges.

1589. n darab pont az m darab egyenessel legfeljebb $\underline{\underline{m \cdot n}}$ különböző síkot feszít ki.

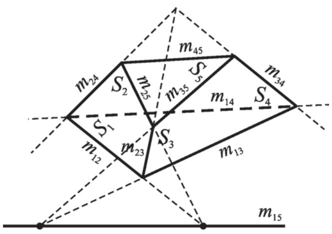
1590. Jelölje a párhuzamos egyeneseket a, b, c, d, és messe az e egyenes a c-t és d-t. 6 síkot határoznak meg: $[a; b]$; $[a; c]$; $[a; d]$; $[b; c]$; $[b; d]$; $[c; d]$. e az a és b egyenesekkel kitérő, így nincs közös síkjuk. $e \in [c; d]$. A feladatnak megfelelő elrendezést szemléltethetünk az $ABCDEFGH$ paralelepipedon segítségével: $e(A; E) = a$, $e(B; F) = b$, $e(C; G) = c$, $e(D; H) = d$, a szaggatott vonal jelöli az e egyenest.

1590.



II

1592.



1591. *a)* 3 síkot határoznak meg: $[a; b]$; $[a; c]$; $[b; c]$. *b)* 6 síkot határoznak meg: $[a; b]$; $[a; c]$; $[a; d]$; $[b; c]$; $[b; d]$; $[c; d]$. *c)* Egy kiválasztott egyenessel bármelyik a négy többi közül egy-egy síkot ad $\Rightarrow$ 4 sík. 5 egyeneshez $5 \cdot 4 = 20$ sík tartozna. Minden síkot kétszer számoltunk, így valójában 5 egyenes $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ síkot határoz meg. *d)* 6 egyenes $\frac{6 \cdot 5}{2} = \underline{\underline{15}}$ síkot határoz meg. *e)* n egyenes $\underline{\underline{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}}$ síkot határoz meg.

1592. A metszésvonalak száma akkor maximális, ha a síkok közül semelyik kettő nem párhuzamos. *a)* $\underline{\underline{3}}$ metszésvonal. *b)* $\underline{\underline{6}}$ metszésvonal. *c)* $\underline{\underline{10}}$ metszésvonal. *d)* Bármely két sík metszi egymást $\Rightarrow$ egy tetszőleges síkon 5 metszésvonal van, ami a többi síktól származik. 6 síkon $6 \cdot 5 = 30$ metszésvonal lenne, de minden metszésvonalat két síkon vettünk számításba, így $\frac{30}{2} = \underline{\underline{15}}$ a metszésvonalak száma. *e)* $\underline{\underline{\frac{n \cdot (n-1)}{2}}}$ a metszésvonalak száma.

1593. Jelölje a párhuzamos síkokat $S_1, S_2, \ldots S_a$, a közös m metszésvonalú síkokat $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_b$. Bármely Σ_i sík az S síkokkal a darab metszésvonalat eredményez. b darab Σ síknak az a darab S síkkal $(a \cdot b)$ darab metszésvonala van. A Σ síkoknak 1 közös metszésvonala van. Összesen: $\underline{\underline{a \cdot b + 1}}$ a metszésvonalak száma.

1594. Legyen a két kitérő egyenes az a és a b egyenes. Húzzunk párhuzamost $M \in a$ ponton át b-vel $\Rightarrow b'$. *a és b'* metsző egyenesek $\Rightarrow [a; b']$ sík. b párhuzamos $[a, b']$-vel, mert ha b döfné az $[a, b']$ síkot, akkor ez a döféspont rajta lenne $[b, b'] \cap [a, b']$ metszésvonalon, ami nem más, mint b'. Ez b és b' párhuzamossága miatt lehetetlen. b-n át hasonlóan vehetünk fel a-val párhuzamos síkot.

1595. Vegyük az a és b egyenes által kifeszített Σ síkot. $S_1 \cap \Sigma = a$; $S_2 \cap \Sigma = b$. Tegyük fel, hogy a egyenes P pontban metszi az $S_1 \cap S_2 = m$ metszésvonalat. $P \in S_2$ és $P \in \Sigma$ miatt $P \in S_2 \cap \Sigma = b$, ami ellentmond a és b párhuzamosságának.

1596. Legyen a párhuzamos az S_1 és S_2 síkokkal. Jelöljük a két sík metszésvonalát m-mel. A bizonyításunk indirekt. **1. eset:** Tegyük fel, hogy a metszi m-et! $a \cap m \in S_1$ miatt ez ellentmond a és S_1 párhuzamosságának.
2. eset: Tegyük fel, hogy a és m kitérők! Fektessünk a-n át m-mel párhuzamos síkot $\Rightarrow [a; m']$, ahol m' párhuzamos m-mel és metszi a-t. $[a; m']$ nem lehet S_1-gyel is és S_2-vel is párhuzamos, így feltehető, hogy $[a; m']$ nem párhuzamos S_1-gyel. Legyen $[a; m'] \cap S_1 = e$. $m' \in [a; m']$, $m \in S_1$ és m, m' párhuzamossága miatt teljesülnek az 1595. feladat feltételei, így m' párhuzamos e-vel. a és m' metsző egyenesek, m' és e párhuzamosak, a, m' és e egy síkban vannak $\Rightarrow a \cap e \neq \emptyset \Rightarrow$ $\Rightarrow a \cap S_1 \neq \emptyset$, ez pedig ellentmond a és S_1 párhuzamosságának.

1597. Jelöljük az S síkot metsző e egyenes döféspontját D-vel. Legyen Σ egy e-re fektetett tetszőleges sík és $S \cap \Sigma = m$. $D \in \Sigma$, mert $D \in e$; $D \in S$, mert $D = e \cap S \Rightarrow D \in \Sigma \cap S = m \Rightarrow D$ rajta van a metszésvonalon.

1598. Legyen $S_1 \cap S_2 = m_{12}$, $S_2 \cap S_3 = m_{23}$ és $S_3 \cap S_1 = m_{13}$. Legyen $m_{12} \cap m_{13} = M$. $M \in m_{12} \Rightarrow$ $\Rightarrow M \in S_1$ és $\underline{M \in S_2}$; $M \in m_{13} \Rightarrow M \in S_1$ és $\underline{M \in S_3}$. Az aláhúzott állításokból $\Rightarrow M \in S_2 \cap S_3 =$ $= m_{23} \Rightarrow$ a harmadik metszésvonal is átmegy M-en.

1599. Legyen $S_1 \parallel S_2 \nparallel S_3$. Legyen $S_3 \cap S_1 = m_{13}$ és $S_2 \cap S_3 = m_{23}$. A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy m_{13} és m_{23} nem párhuzamosak. Mivel egy síkban vannak, ezért létezik a P metszéspontjuk. $P \in m_{13} \Rightarrow \underline{P \in S_1}$ és $P \in S_3$; $P \in m_{23} \Rightarrow \underline{P \in S_2}$ és $P \in S_3$. Az aláhúzott állításokból $\Rightarrow P \in S_1 \cap S_2$, ami ellentmondás, mivel $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Tehát m_{13} és m_{23} párhuzamosak.

1600. Legyen S a P és b által kifeszített sík. Legyen $a \cap S = M$. MP egyenes megfelel az elvárásnak, ha MP nem párhuzamos b-vel; ugyanis e$(M; P)$ metszi a-t is, b-t is és átmegy P-n. Ha MP párhuzamos b-vel vagy $a \cap S = \emptyset$, akkor nincs megoldás, ahogy ezt az 1590. ábrán is szemléltethetjük: $e[E; H] = a$, $e[B; F] = b$ és P pont az A vagy a G csúcs.

1601. Jelöljük a kitérő egyeneseket a-val, b-vel, a harmadik egyenest c-vel. Húzzunk párhuzamost b egy tetszőleges pontján át c-vel $\Rightarrow c'$. Legyen $[c'; b] = S$ és $a \cap S = M$. Húzzunk párhuzamost M-en át c'-vel $\Rightarrow e$. e megfelelő, mert metszi a-t is, b-t is, és $c \parallel c' \parallel e \Rightarrow c \parallel e$. Nincs megoldás, ha $c \parallel b$ vagy $a \parallel S$.

1602. Legyenek a és b metsző egyenesek, a és c, a és d, b és c, b és d, c és d kitérő egyenesek. Legyen $S = [a; b]$, $S \cap c = C$ és $S \cap d = D$. e$(C; D) = e$ megfelelő egyenes. Nincs megoldás, ha $c \parallel S$ vagy $d \parallel S$ vagy $CD \parallel a$ vagy $CD \parallel b$.

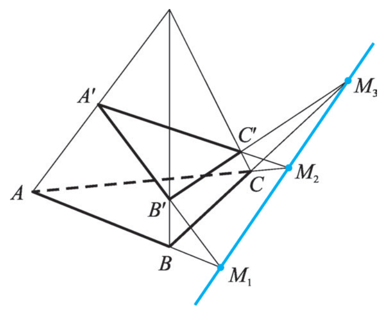
1603. Az 1600. feladatban láttuk, hogy néhány kivételtől eltekintve bármely P pont és rá nem illeszkedő a, b kitérő egyenespár esetén van olyan egyenes, amely átmegy P-n és metszi a-t és b-t. A harmadik kitérő egyenesnek nincs közös pontja a-val és b-vel, így a kivételektől eltekintve bármely pontjához szerkeszthető a-t, b-t metsző egyenes. Tehát végtelen sok ilyen egyenes létezik.

1604. Legyen a síkok metszésvonala m, a kitérő egyenesek legyenek a és b. Ha a szerkesztendő egyenes párhuzamos S_1-gyel és S_2-vel , akkor párhuzamos m-mel és viszont. Az 1601. feladat módszerével szerkesszünk olyan e egyenest, ami párhuzamos m-mel, és metszi a-t és b-t.

1605. Ha két egyenes metszéspontján nem megy át egy harmadik egyenes, de mindkét egyenest metszi, akkor illeszkedik azok síkjára, hiszen ha az egyenesnek egy síkkal két közös pontja van, akkor minden pontjuk közös. Ez a gondolatmenet folytatható minden további egyenes és a síkban lévő kettő felhasználásával. Ha a fenti eset nem áll fenn, akkor az egyenesek egy pontban metszik egymást.

1606. *a)* Legyen az $ABC\triangle$ síkja S, az $A'B'C'\triangle$ síkja S'. S nem párhuzamos S'-vel, mivel $AB \cap A'B'$, $BC \cap B'C'$ és $AC \cap A'C'$ nem üres. e$(A; B) \cap$ e$(A'; B') = M_1$; $M_1 \in S \cap S'$. e$(B; C) \cap$ e$(B'; C') = M_3$; $M_3 \in S \cap S'$. e$(A; C) \cap$ e$(A'; C') = M_2$; $M_2 \in S \cap S'$. A két sík metszésvonala egyenes, tehát a metszéspontok egy egyenesen vannak.

1606.

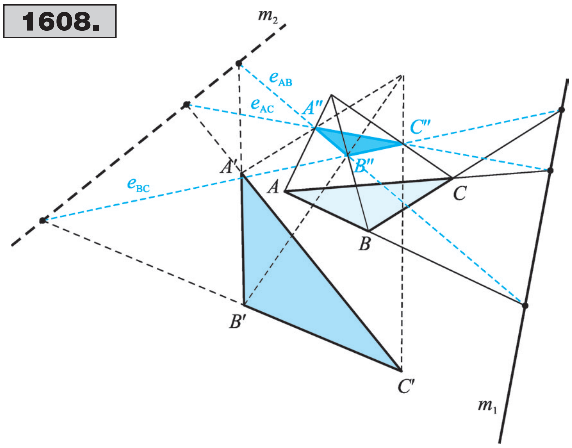


b) Ha AA' és BB' metszik egymást, akkor metszéspontjukon CC' is átmegy. Nem fordulhat elő ugyanis, hogy AA' és BB' metszik egymást, CC' pedig párhuzamos pl. AA'-vel. Ekkor CC' és BB' kitérők lennének (metszők nem lehetnek, mert akkor mindhárman egy síkban lennének), ami ellentmond annak, hogy B, C, C' és B' egy síkban vannak. Ha viszont páronként metszik egymást, akkor az 1605. feladat állítása szerint csak egy pontban metszhetik egymást, mivel nincsenek egy síkban. Ha van köztük két párhuzamos, akkor a harmadik is párhuzamos lesz velük.

1607. Tegyük fel, hogy AA' metszi BB'-t és AA' párhuzamos CC'-vel $\Rightarrow$ (1) CC' metszi BB'-t vagy (2) CC' és BB' kitérők. **(1) esetben** a három egyenes egy síkban lenne, ami ellentmondás. **(2) esetben** $BC \parallel B'C'$ miatt $BCC'B'$ trapéz $\Rightarrow B, C, B', C'$ egy síkban vannak, tehát CC', BB' nem lehetnek kitérők. Ha tehát AA' és BB' metszők, akkor CC' is metszi mindkettőt. Térbeli egyenesekről lévén szó, az 1605. feladat állítása miatt egy ponton mennek át. Az adott pontok egy háromszög alapú csonka gúla csúcsai. Ha van köztük két párhuzamos, akkor a harmadik is párhuzamos velük. Az adott pontok egy háromszög alapú hasáb csúcsai.

II

1608.



1608. Legyen $S \cap [ABC] = m_1$ és $S \cap [A'B'C'] = m_2$. Az 1606. feladatban láttuk, hogy a szerkesztendő $A''B''C''\triangle$ megfelelő oldalegyeneseire: $A''B'' \cap AB \in m_1$, $A''C'' \cap AC \in m_1$ és $B''C'' \cap BC \in m_1$.
Hasonlóan $A''B'' \cap A'B' \in m_2$, $A''C'' \cap A'C' \in m_2$ és $B''C'' \cap B'C' \in m_2$.
A szerkesztés: ① $A'B' \cap m_2$ és $AB \cap m_1$ összekötő egyenese e_{AB}.
② $A'C' \cap m_2$ és $AC \cap m_1$ összekötő egyenese e_{AC}.
③ $B'C' \cap m_2$ és $BC \cap m_1$ összekötő egyenese e_{BC}.
④ $e_{AB} \cap e_{AC} = A''$; $e_{AB} \cap e_{BC} = B''$; $e_{AC} \cap e_{BC} = C'' \Rightarrow A''B''C''\triangle$.

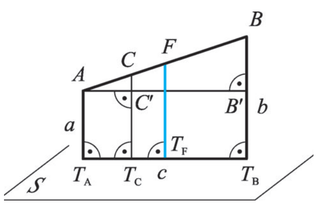
Térelemek távolsága és hajlásszöge

1609. Jelöljük a síkot S-sel és egy tetszőleges pontját P-vel. A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy két olyan egyenes van P-ben, ami merőleges S-re $\Rightarrow m_1, m_2$. Vegyük m_1 és m_2 metsző egyenesek síkját $\Rightarrow \Sigma$. Legyen $\Sigma \cap S = m$. $m, m_1, m_2 \in \Sigma$, m egyenes P pontjában két merőleges nem lehet egy síkban, tehát hibás a feltevés $\Rightarrow$ csak egy egyenes van, ami P-ben merőleges S-re.
1610. Jelöljük a síkot S-sel és a síkra nem illeszkedő pontot P-vel. A bizonyítás indirekt. Tegyük fel, hogy két P-re illeszkedő egyenes van, ami merőleges S-re $\Rightarrow m_1, m_2$. m_1, m_2 metsző egyenesek síkja legyen Σ. A Σ síkban fekvő $PT_1T_2\triangle$-ben két derékszög van, ami ellentmondás. Tehát hibás a feltevés $\Rightarrow P$-ből csak egy merőleges állítható S-re.
1611. *a)* **1. eset:** a sík nem választja el A-t és B-t. A-ból merőlegest állítunk BT_B-re $\Rightarrow B'$. $\Rightarrow ABB'\triangle$-ben $AB'B\sphericalangle = 90°$, $AB' = T_AT_B = 4{,}2$ m, $BB' = 5{,}8$ m $- 3{,}7$ m $= 2{,}1$ m. Pitagorasz-tételből $AB \approx \underline{\underline{4{,}7\ \text{m}}}$.

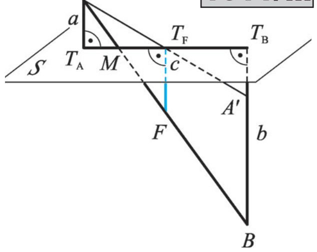
2. eset: a sík elválasztja A-t és B-t. $AT_AM\triangle \sim BT_BM\triangle$, mert szögeik páronként egyenlők $\Rightarrow$ a megfelelő oldalak aránya egyenlő $\Rightarrow \dfrac{AT_A}{BT_B} = \dfrac{T_AM}{T_BM} \Rightarrow \dfrac{3{,}7}{5{,}8} = \dfrac{T_AM}{4{,}2 - T_AM} \Rightarrow T_AM \approx 1{,}64$ m és $T_BM \approx 2{,}56$ m. A Pitagorasz-tételből: $AM \approx 4{,}05$ m és $BM \approx 6{,}34$ m. $AB = AM + BM \approx \underline{\underline{10{,}39\ \text{m}}}$.

b) A Pitagorasz-tétel az $A'AT\triangle$-re: $x^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow x = \underline{\underline{\sqrt{a^2 - b^2}}}$. Ha $a = 11{,}38$ m és $b = 4{,}62$ m, akkor $x = \underline{\underline{10{,}4\ \text{m}}}$.

1611/I.



1611/II.



c) **1. eset:** a sík nem választja el A-t és B-t. FT_F középvonal az AT_AT_BB trapézban $\Rightarrow FT_F = \underline{\underline{\dfrac{a+b}{2}}}$.

2. eset: a sík elválasztja A-t és B-t. Ha $a = b$, akkor $AB \cap S = F$, így $F \in S$ miatt a távolság $\underline{\underline{\text{nulla}}}$. Ha $b > a$, akkor tükrözzük A-t T_F-re $\Rightarrow A'$. T_FF középvonal az $ABA'\triangle$-ben: $T_FF = \dfrac{A'B}{2} = \underline{\underline{\dfrac{b-a}{2}}}$.

d) Legyen B' az A pont BT_B-re vetett merőleges vetülete. Legyen $AB' \cap CT_C = C'$. Alkalmazzuk a párhuzamos szelőszakaszok tételét a $B'AB\sphericalangle\, CC'$ és BB' párhuzamos szelőire: $CC' : BB' = p : (p+q) \Rightarrow CC' = \dfrac{p}{p+q}(b-a)$. $CT_C = CC' + C'T_C = \dfrac{p}{p+q}(b-a) + a = \underline{\underline{\dfrac{pb+qa}{p+q}}}$.

1612. $d(S;\Sigma) = \underline{\underline{\dfrac{a+b+c}{3}}}$.

1613. Az 1611. *c)* feladatban láttuk: F felezi AC-t $\Rightarrow FT_F = \dfrac{a+c}{2}$. F felezi BD-t $\Rightarrow FT_F = \dfrac{b+d}{2}$. A két állításból $\Rightarrow \dfrac{a+c}{2} = \dfrac{b+d}{2} \Rightarrow a + c = b + d \Rightarrow \underline{\underline{a - b = d - c}}$.

1614. Jelöljük az S síkra nem illeszkedő pontot P-vel, a P ponton átmenő egyenesek közül a síkra merőlegesnek a talppontját T_P-vel, a nem merőlegesek döféspontját A_1, A_2, … A_i-vel.
a) $PA_i > PT_P$ bármely $A_i \in S$, $A_i \neq T_P$ esetén, mert PA_i átfogó, PT_P befogó az $A_iT_PP\triangle$-ben.
b) $PA_i = PA_j \Leftrightarrow \sqrt{PT_p^2 + A_iT_p^2} = \sqrt{PT_p^2 + A_jT_p^2} \Leftrightarrow A_iT_P = A_jT_P$.
c) $PA_i > PA_j \Leftrightarrow \sqrt{PT_p^2 + A_iT_p^2} > \sqrt{PT_p^2 + A_jT_p^2} \Leftrightarrow A_iT_P > A_jT_P$.

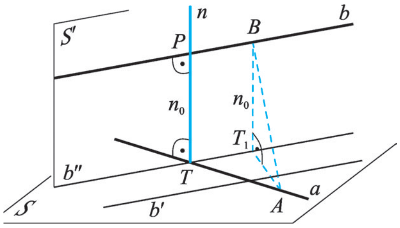
1615. Legyen $PD = d$, $AB = x$, $AD = y$. $PA \perp [ABCD] \Rightarrow PA \perp AB \Rightarrow PAB\triangle$ derékszögű. A Pitagorasz-tételből $x = \underline{\underline{\sqrt{b^2 - a^2}}}$. $PA \perp [ABCD] \Rightarrow PA \perp AC \Rightarrow PAC\triangle$ derékszögű. A Pitagorasz-tételből $AC = \sqrt{c^2 - a^2}$. $ABCD$ téglalap $\Rightarrow ABC\triangle$ derékszögű. A Pitagorasz-tételből $\Rightarrow AC = \sqrt{x^2 + y^2}$. Az AC-re kapott két állítást összevetve: $c^2 - a^2 = b^2 - a^2 + y^2 \Rightarrow y = \underline{\underline{\sqrt{c^2 - b^2}}}$.
$PA \perp [ABCD] \Rightarrow PA \perp AD \Rightarrow PAD\triangle$ derékszögű. Pitagorasz-tétel a $PAD\triangle$-re: $d = \sqrt{a^2 + y^2} = \underline{\underline{\sqrt{a^2 + c^2 - b^2}}}$.

1616. $b = PA = PB = PC$, így P-ből $[ABC]$ síkra állított merőleges talppontja az $ABC\triangle$ körülírt körének középpontja. $ABC\triangle$ szabályos, így a körülírt kör középpontja a súlypont $\Rightarrow$ a fenti merőleges talppontja S. Legyen F a BC szakasz felező pontja. $AS : SF = 2 : 1 \Rightarrow AS = \dfrac{2}{3}AF = \dfrac{a\cdot\sqrt{3}}{3}$. $PS \perp AS \Rightarrow ASP\triangle$ derékszögű. Pitagorasz-tétel az $ASP\triangle$-re $\Rightarrow PS = \underline{\underline{\dfrac{\sqrt{9b^2 - 3a^2}}{3}}}$.

1617. Jelöljük a két metsző síkot S_1-gyel, S_2-vel, a rájuk nem illeszkedő pontot P-vel. Legyen $S_1 \cap S_2 = m$, a P-ből S_1-re állított merőleges talppontja P_1, az S_2-re állított merőleges talppontja pedig P_2. $PP_2 \perp S_2 \Rightarrow PP_2$ merőleges S_2 minden egyenesére $\Rightarrow$ $\underline{PP_2 \perp m}$. $PP_1 \perp S_1 \Rightarrow PP_1$ merőleges S_1 minden egyenesére $\Rightarrow$ $\underline{PP_1 \perp m}$. Az aláhúzott állításokból $\Rightarrow$ $m \perp [PP_1P_2]$, mert merőleges annak PP_1 és PP_2 metsző egyeneseire $\Rightarrow m$ merőleges $[PP_1P_2]$ minden egyenesére $\Rightarrow \underline{\underline{m \perp e(P_1;P_2)}}$.

II

1618.



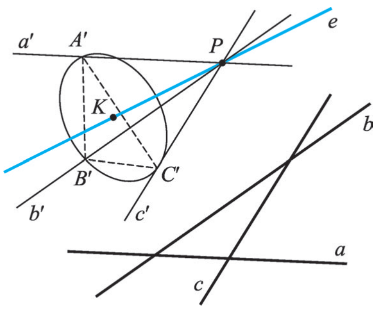
1618. a és b kitérő egyenesek. Húzzunk párhuzamost b-vel a tetszőleges pontján át $\Rightarrow b'$. $[b'; a]$ sík legyen S. Fektessünk b-n át S-re merőleges síkot $\Rightarrow S'$. $S' \cap S = b''$; $b'' \cap a = T$. Állítsunk merőlegest T-ben S-re $\Rightarrow n$. $n \perp a$, mert $n \perp S$; $n \perp b$, mert $n \perp b''$ és $b'' \parallel b$; n metszi a-t, mert $T \in a$; n metszi b-t, mert $n \in S'$, $b \in S'$ és n nem párhuzamos b-vel. n a keresett normáltranszverzális. Tegyük fel, hogy van egy $n_1 \neq n$ normáltranszverzális. n_1 benne van egy, az a-ra merőleges, tehát n-nel párhuzamos Σ_1 síkban, valamint egy, a b-re merőleges, tehát n-nel párhuzamos Σ_2 síkban. $\Rightarrow n_1 = \Sigma_1 \cap \Sigma_2 \Rightarrow n_1 \parallel n \Rightarrow n_1$ és n metszéspontjai a-val és b-vel olyan trapézt alkotnak, amelynek száregyenesei a és b. Ez ellentmond annak, hogy a és b kitérők. $\Rightarrow$ Csak egy normáltranszverzális van.

1619. Tekintsük az 1618. ábrát. Húzzunk a normáltranszverzális a-val való T metszéspontján át párhuzamost b-vel $\Rightarrow b''$. Legyen $B \in b$, $A \in a$ két tetszőleges pont a két kitérő egyenesen. B-n át párhuzamost húzunk n-nel $\Rightarrow T_1 \Rightarrow BT_1 = n_0$. $n \perp S$ miatt $BT_1 \perp S \Rightarrow BT_1 \perp T_1A \Rightarrow BT_1A\triangle$ derékszögű, átfogója BA, egyik befogója $BT_1 \Rightarrow BT_1 < BA \Rightarrow \underline{\underline{n_0 < BA}}$.

1620. Tekintsük az 1618. ábrát. Az S sík bármely b-vel nem párhuzamos a egyenese kitérő b-vel. b és a normáltranszverzálisa a b-re illeszkedő, S-re merőleges S' sík b'' metszésvonalának a-val való metszéspontjában b-re állított merőleges b és b'' közti szakasza $\Rightarrow PT$. b és b'' párhuzamossága miatt $d(b; b'') =$ állandó.

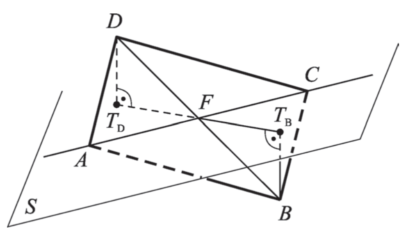
1621. Adott a, b, c és P. Húzzunk párhuzamost P-n át az adott egyenesekkel $\Rightarrow a'$, b' és c'. Mérjünk P-ből egy irányban egyenlő szakaszokat az a', b' és c' egyenesekre $\Rightarrow A'$, B' és C'. PA', PB' és PC' felfoghatók egy forgáskúp alkotóinak $\Rightarrow$ a keresett egyenes a forgáskúp tengelye. $A'B'C'\triangle$ körülírt körének középpontja K. $KPA'\sphericalangle = KPB'\sphericalangle = KPC'\sphericalangle$, egyenlők a kúp fél nyílásszögével. Ha a párhuzamos b-vel és c-vel, akkor a P-n át húzott összes egyenes megoldás. Ha a párhuzamos b-vel, de nem párhuzamos c-vel, akkor a' és c' szögfelezői és az ezeket tartalmazó, $[a'; c']$ síkra merőleges sík P-n átmenő egyenesei a megoldások. a', b' és c' félegyeneseinek megválasztásától függően 4 megoldás lehetséges. A választási lehetőségek száma ugyan 8, de 2-2 megoldás P-re középpontosan szimmetrikus, tehát ugyanazt az egyenest eredményezik.

1621.



1622. Tekintsük az 1611/II. ábrát. Legyen $F \in S \Rightarrow F \equiv T_F$. $AT_A \perp S$ és $BT_B \perp S \Rightarrow AT_A$ párhuzamos BT_B-vel. A, T_A, B, T_B egy síkban vannak $\Rightarrow S'$. T_A, $T_B \in S$, és T_A, $T_B \in S' \Rightarrow T_AT_B$ egyenes a két sík metszésvonala. A, $B \in S'$, így AB egyenese a két sík metszésvonalán döfi az S síkot $\Rightarrow F \in T_AT_B$.
$T_AFA\triangle \cong T_BFB\triangle$ $(FA = FB;\ FT_AA\sphericalangle = FT_BB\sphericalangle = 90°;$ $BFT_B\sphericalangle = AFT_A\sphericalangle$, mert csúcsszögek$) \Rightarrow AT_A = BT_B$. Ha A, $B \in S$, akkor $d(A; S) = d(B; S) = 0$.

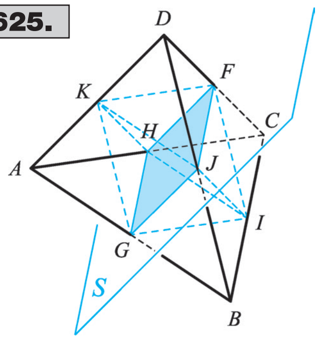
1623.



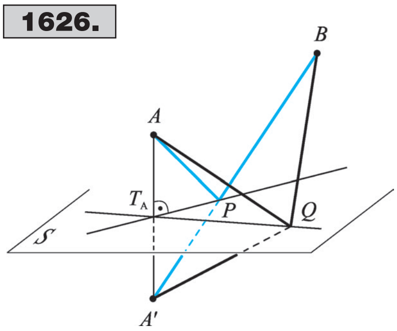
1623. A paralelogramma átlói felezik egymást $\Rightarrow$ az AC-re fektetett S sík átmegy a BD átló F felezéspontján. Az 1622. feladatban láttuk, hogy $d(D; S) = d(B; S)$.

1624. AB felezéspontja F. e és F síkja S. Az 1622. feladatban láttuk, hogy egy szakasz felezéspontján átmenő sík egyenlő távol van a szakaszvégpontoktól. S ilyen sík, tehát megfelelő. Végtelen sok megoldás van, ha $F \in e$ vagy AB párhuzamos e-vel, egy megoldás van egyébként.

1625.

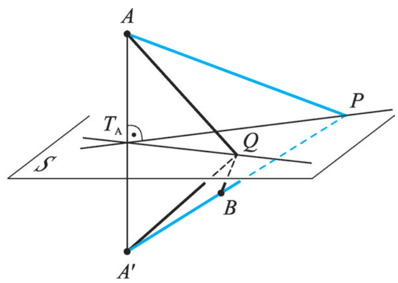


1626.

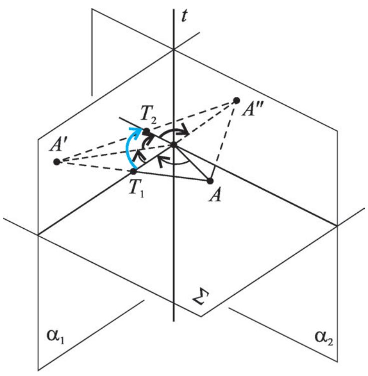


1625. **1. eset:** Ha A, B, C és D nincsenek egy síkban, akkor egy tetraédert határoznak meg. Az 1622. feladatban láttuk, hogy egy szakasz felezéspontján átmenő sík egyenlő távol van a szakasz végpontjaitól. Válasszuk pl. A-t, D-t, illetve B-t, C-t a leendő sík két oldalán levő pontoknak. AB felezéspontja G; $(\mathrm{d}(A;S) = \mathrm{d}(B;S)$ kell, hogy teljesüljön$)$. CD felezéspontja F; $(\mathrm{d}(C;S) = \mathrm{d}(D;S)$ kell, hogy teljesüljön$)$. AC felezéspontja H; $(\mathrm{d}(A;S) = \mathrm{d}(C;S)$ kell, hogy teljesüljön$)$. BD felezéspontja J; $(\mathrm{d}(B;S) = \mathrm{d}(D;S)$ kell, hogy teljesüljön$)$. G, F és H pontok síkja megfelelő, mert teljesíti a kívánt távolságfeltételeket, és $GHFJ$ paralelogramma, így a DB szakasz felezéspontján, J-n is átmegy. AB, DC párral, illetve AC, BD párral újabb síkokhoz jutunk, így három megoldás van.
2. eset: Ha A, B, C és D egy síkban vannak, tengelyesen szimmetrikusan helyezkednek el, de nem illeszkednek a szimmetriatengelyre, akkor a tengelyt tartalmazó síkok a pontok síkjának kivételével mind megfelelnek.
3. eset: A fenti két esetben vázolt helyzetektől eltérő pontnégyes esetén nincs megoldás.
1626. Tükrözzük A-t S-re $\Rightarrow A'$; $A'B \cap S = P$; APB út a legrövidebb, mert: ① $[AA'B]$ síkban gondolkodva a tükrözés miatt $AP = A'P$. ② A' és B között a legrövidebb út az $A'B$ szakasz: $A'B = A'P + PB = AP + PB = \min$. ③ Minden más $Q \in S$ esetén az $A'BQ\triangle$-ben $A'Q + QB > A'B$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt. $A'Q = AQ$ miatt $AQ + QB > A'B = AP + PB$.
1627. Tükrözzük A-t S-re $\Rightarrow A'$; $A'B \cap S = P$; $(AP - PB)$ út a leghosszabb, mert: ① $[AA'B]$ síkban gondolkodva a tükrözés miatt $AP = A'P$. ② $AP = A'P = A'B + BP \Rightarrow AP - BP = A'B$. ③ Minden más $Q \in S$ esetén az $A'BQ\triangle$-ben $A'Q - QB < A'B$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt. $A'Q = AQ$ összefüggést felhasználva $AQ - QB < A'B = AP - PB$, tehát valóban a P pont esetében maximális a különbség.
1628. Legyen AB felezőpontja F. Vegyük fel AB felezőmerőleges síkját $\Rightarrow S$. S bármely X pontjára $XA = XB$, mert $AB \perp S$ miatt $AB \perp XF$, és $FA = FB$ miatt XF egyenese az AB szakasz egy felezőmerőlegese. $e \cap S = E$ pontra $EA = EB$ teljesül. Nincs megoldás, ha e párhuzamos S-sel, azaz $AB \perp e$ és $F \notin e$. Végtelen sok megoldás van, ha e az AB szakasz felezőmerőlegese.
1629. Legyen K az $ABC\triangle$ körülírt körének középpontja $\Rightarrow AK = BK = CK$. Legyen $m \perp [ABC]$ úgy, hogy $K \in m$. Az m bármely X pontjára $XA = XB = XC$, hiszen XA-nak KA, XB-nek KB, XC-nek KC az $[ABC]$ síkra vett merőleges vetülete. $m \cap S = M$ a keresett pont. Nincs megoldás, ha m párhuzamos S-sel, azaz $[ABC] \perp S$. Végtelen sok megoldás van, ha $m \subset S$.
1630. Legyen a P pont α_1 síkra vonatkozó tükörképe P', a P' pont α_2 síkra vonatkozó tükörképe P''. Irányított szakaszokkal: $PT_1 = T_1P'$; $P'T_2 = T_2P''$. $PP'' = PT_1 + T_1P' + P'T_2 + T_2P'' = T_1P' + T_1P' + P'T_2 + P'T_2 = 2(T_1P' + P'T_2) = 2T_1T_2$. Tehát az állítás igaz.

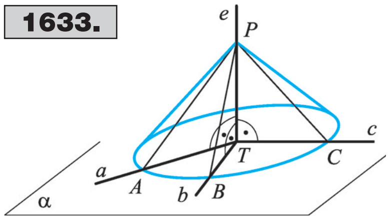
1627.



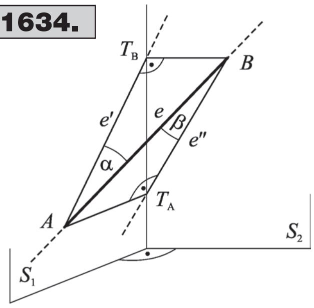
1631.



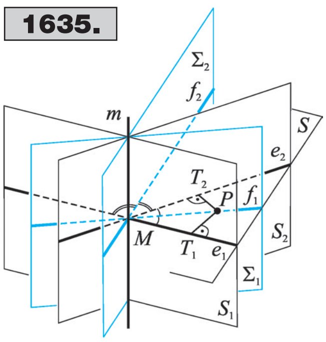
1633.



1634.



1635.



1631. $AA' \perp \alpha_1 \Rightarrow AA'$ merőleges α_1 minden egyenesére $\underline{AA' \perp t}$. $A'A'' \perp \alpha_2 \Rightarrow A'A''$ merőleges α_2 minden egyenesére $\underline{A'A'' \perp t}$. Az aláhúzott állításokból $\Rightarrow t \perp [AA'A''] = \Sigma$. $O = t \cap \Sigma$. α_1 az AA' szakasz felezőmerőleges síkja; $O \in \alpha_1 \Rightarrow AO = A'O$. α_2 az $A'A''$ szakasz felezőmerőleges síkja; $O \in \alpha_2 \Rightarrow A'O = A''O$. $AO = A'O = A''O$. Irányított szögeket alkalmazva: $AOT_1\sphericalangle = T_1OA'\sphericalangle$; $A'OT_2\sphericalangle = T_2OA''\sphericalangle$ a tükrözés miatt. $\underline{AOA''\sphericalangle} = AOT_1\sphericalangle + T_1OA'\sphericalangle + A'OT_2\sphericalangle + T_2OA''\sphericalangle = T_1OA'\sphericalangle + T_1OA'\sphericalangle + A'OT_2\sphericalangle + A'OT_2\sphericalangle = 2(T_1OA'\sphericalangle + A'OT_2\sphericalangle) = \underline{2T_1OT_2\sphericalangle}$. $T_1O \in \Sigma$ miatt $T_1O \perp t$ és $T_2O \in \Sigma$ miatt $T_2O \perp t \Rightarrow T_1OT_2\sphericalangle = \sphericalangle(\alpha_1; \alpha_2)$. Az aláhúzott állítás: $AOA''\sphericalangle = 2\sphericalangle(\alpha_1; \alpha_2)$. A gondolatmenet nem függ az A pont helyzetétől.

A feladat eredménye azt jelenti, hogy két metsző síkra vonatkozó tükrözés egymásutánja helyettesíthető egy, a síkok metszésvonala mint tengely körüli forgatással, aminek szöge a síkok hajlásszögének kétszerese, irányát pedig a síkok sorrendje szabja meg.

1632. Legyen α_1 az AA' szakaszfelező merőleges síkja, α_2 a BB' szakaszfelező merőleges síkja, valamint $\alpha_1 \cap \alpha_2 = t$. Legyen az AA'-re illeszkedő, t-re merőleges sík t-vel való döféspontja O_1, BB'-re illeszkedő, t-re merőleges sík t-vel való döféspontja O_2. ABO_1O_2 tetraéder egybevágó az $A'B'O_1O_2$ tetraéderrel, mert: ① $AB = A'B'$, a feltétel miatt. ② $BO_2 = B'O_2$ $O_2 \in t$ miatt. ③ $AO_2 = A'O_2$, $O_2 \in t$ miatt. ④ $AO_1 = A'O_1$, $O_1 \in t$ miatt. ⑤ $BO_1 = B'O_1$, $O_1 \in t$ miatt. ⑥ O_1O_2 közös él. Egybevágóságuk és körüljárásuk egyezése miatt t körüli forgással vihetők egymásba $\Rightarrow B$-t ugyanaz a forgás viszi B'-be, mint A-t A'-be. AB-t t körüli forgatás viszi $A'B'$-be. Nincs megoldás, ha α_1 párhuzamos α_2-vel. Ha $\alpha_1 = \alpha_2$, akkor AA' és BB' párhuzamossága miatt $ABB'A'$ húrtrapéz, a felező sík minden egyenese alkalmas forgástengelynek.

1633. Legyen $P \in e, A \in a, B \in b$ és $C \in c$ úgy, hogy $TA = TB = TC \Rightarrow ATP\triangle \cong BTP\triangle \cong CTP\triangle$, mert egy oldaluk közös, másik oldaluk és a közös oldallal bezárt szögük páronként egyenlő $\Rightarrow PA = PB = PC \Rightarrow$ egy P csúcsú, $ABC\triangle$ köré írható alapkörű forgáskúp alkotói $\Rightarrow PT$ tengely $\perp$ az alapkör síkjára $\Rightarrow e \perp \alpha$.

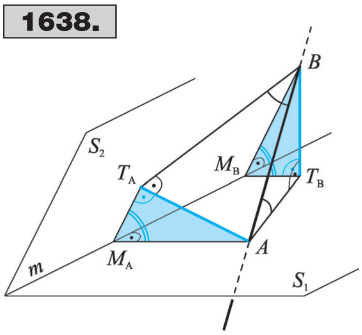
1634. $ABT_B\triangle$ derékszögű $\Rightarrow \alpha = \sphericalangle(AB; S_1)$. $BAT_A\triangle$ derékszögű $\Rightarrow \beta = \sphericalangle(AB; S_2)$. $BT_AT_B\triangle$ derékszögű. $ABT_B\triangle$ és $BAT_A\triangle$ átfogója közös. $ABT_B\triangle$-ben α-val szemben levő befogó BT_B. $ABT_A\triangle$-ben $(90° - \beta)$-val szemben levő befogó BT_A. $BT_AT_B\triangle$-ben BT_B befogó, BT_A átfogó, ezért $BT_A > BT_B \Rightarrow ABT_B\triangle$-ben kisebb oldal van α-val szemben, mint $ABT_A\triangle$-ben $(90° - \beta)$-val szemben, miközben átfogójuk közös és mindegyik derékszögű $\Rightarrow \alpha < 90° - \beta$ (kisebb oldallal szemben kisebb szög) $\Rightarrow \alpha + \beta < 90°$.

1635. Jelöljük a két adott síkot S_1-gyel, S_2-vel, a szögeket felező síkokat Σ_1-gyel és Σ_2-vel. Messük el a síkokat a közös m metszésvonalra $\perp S$ síkkal $\Rightarrow e_1$, f_1, e_2, f_2 metszésvonalak. $\sphericalangle(e_1; e_2) = \sphericalangle(S_1; S_2)$. Σ_1 felezi S_1 és S_2 szögét $\Rightarrow f_1$ felezi e_1, e_2 szögét. Σ_2 felezi S_1 és S_2 mellékszögét $\Rightarrow$ $\Rightarrow f_2$ felezi e_1, e_2 mellékszögét. $2\sphericalangle(e_1; f_1) + 2\sphericalangle(e_1; f_2) = 180°$. $\sphericalangle(e_1; f_1) + \sphericalangle(e_1; f_2) = 90° \Rightarrow f_1 \perp f_2 \Rightarrow \Sigma_1 \perp \Sigma_2$.

1636. Tekintsük az 1635. ábrát. Legyen a két sík S_1, S_2, a szöget felező sík Σ_1. Legyen S P-re illeszkedő, m-re merőleges sík. $S \cap S_1 = e_1$, $S \cap S_2 = e_2$, $S \cap \Sigma_1 = f_1$. Σ_1 felezi S_1, S_2 szögét $\Rightarrow f_1$ felezi e_1, e_2 szögét $\Rightarrow$ $\underline{PT_1 = PT_2}$. $PT_1 \perp e_1$ és $m \perp PT_1$ miatt $PT_1 \perp S_1 \Rightarrow PT_1 = \mathrm{d}(P; S_1)$. Hasonlóan belátható, hogy $PT_2 = \mathrm{d}(P; S_2)$. Az aláhúzott állítás miatt $\mathrm{d}(P; S_1) = \mathrm{d}(P; S_2)$.

1637. Tekintsük az 1635. ábrát. Legyen a két sík S_1, S_2, a szöget felező sík Σ_1, e sík egy pontja P. A P pontban Σ_1 síkra állított merőleges P_1 és P_2 pontban metszi az S_1 és S_2 síkokat. Fektessünk m-re merőleges síkot P_1P_2-n keresztül $\Rightarrow S$. $P_1P_2M\triangle$-ben: MP felezi a $P_1MP_2\sphericalangle$-et ($P \in \Sigma$; $m \perp S$; $MP_1 \perp m$; $MP_2 \perp m$). $MP \perp P_1P_2 \Rightarrow MP_1P_2\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow$ $\underline{\underline{PP_1 = PP_2}}$.

1638.



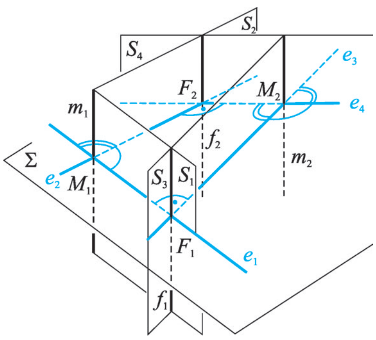
1638. Jelöljük az S_1, S_2 síkokkal egyenlő szöget bezáró egyenes döféspontját A-val és B-vel. *a)* $AT_BB\triangle \cong BT_AA\triangle$, mert a BA oldal közös, mindkettő derékszögű és $BAT_B\sphericalangle = ABT_A\sphericalangle$ a feltétel szerint $\Rightarrow BT_B = AT_A$. Legyen AM_A az A pontnak az m metszésvonaltól, BM_B a B pontnak az m metszésvonaltól való távolsága. $AT_A \perp S_2 \Rightarrow AT_A \perp m$ és $\underline{AM_A \perp m} \Rightarrow m \perp [AT_AM_A] \Rightarrow$ $\Rightarrow \underline{m \perp M_AT_A}$. Az aláhúzottakból $\Rightarrow T_AM_AA\sphericalangle = \sphericalangle(S_1; S_2)$. Hasonlóan belátható, hogy $T_BM_BB\sphericalangle =$ $= \sphericalangle(S_1; S_2)$. $AT_AM_A\triangle \cong BT_BM_B\triangle$, mert mindkettő derékszögű, $T_AM_AA\sphericalangle = T_BM_BB\sphericalangle$ és $AT_A =$ $= BT_B \Rightarrow AM_A = BM_B$.

b) Az a)-beli gondolatmenet fordított sorrendben megismételhető. Az utolsó egybevágóságot az $AM_A = BM_B$, $M_AT_AA\sphericalangle = M_BT_BB\sphericalangle = 90°$ és $\sphericalangle(S_1; S_2) = T_AM_AA\sphericalangle = T_BM_BB\sphericalangle$ állításokkal igazoljuk.

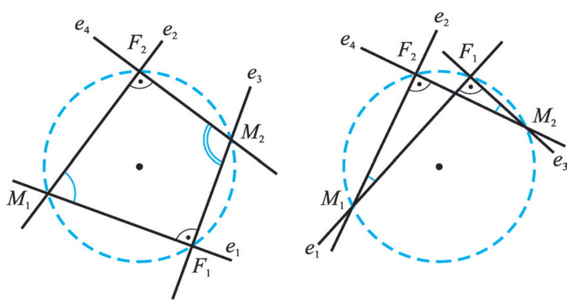
1639. Legyen Σ az m_1, m_2, f_1, f_2 párhuzamos metszésvonalakra $\perp$ sík. $\Sigma \cap S_1 = e_1 \Rightarrow e_1 \perp m_1$ és $\Sigma \cap S_2 = e_2 \Rightarrow e_2 \perp m_1 \Rightarrow \sphericalangle(e_1; e_2) = \sphericalangle(S_1; S_2)$. $\Sigma \cap S_3 = e_3 \Rightarrow e_3 \perp m_2$ és $\Sigma \cap S_4 = e_4 \Rightarrow e_4 \perp m_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow \sphericalangle(e_3; e_4) = \sphericalangle(S_3; S_4)$. Hasonlóan $\sphericalangle(e_1; e_3) = \sphericalangle(S_1; S_3) = \text{⊾}$ és $\sphericalangle(e_2; e_4) = \sphericalangle(S_2; S_4) = \text{⊾}$. A Σ síkon a metszetek az ábrán vázoltak lehetnek. A keletkezett síkmetszeten az M_1, F_1, M_2, F_2 pontok egy körön vannak. Mivel $M_1F_1M_2\sphericalangle = M_1F_2M_2\sphericalangle = \text{⊾} \Rightarrow F_2M_1F_1\sphericalangle = F_2M_2F_1\sphericalangle$ vagy $F_2M_1F_1\sphericalangle + F_2M_2F_1\sphericalangle = 180°$, tehát M_1-nél, illetve M_2-nél a szögek vagy egyenlők vagy kiegészítők.

1640. Jelöljük az S_1, S_2 félsík által meghatározott lapszög élét e-vel. Legyen $m_1 \perp S_1$ és $m_2 \perp S_2$ félegyenes a megfelelő féltérben. Vegyük fel az m_1, m_2 merőlegesek síkját $\Rightarrow \Sigma$. $m_1 \perp S_1 \Rightarrow m_1 \perp e$

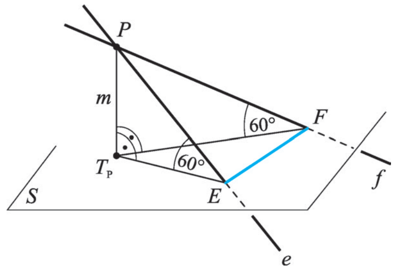
1639/I.



1639/II.



1642.



és $m_2 \perp S_2 \Rightarrow m_2 \perp e \Rightarrow e \perp \Sigma$. $\Sigma \cap S_1 = e_1$ és $\Sigma \cap S_2 = e_2 \Rightarrow e \perp e_1$ és $e \perp e_2 \Rightarrow \sphericalangle(e_1; e_2) = \sphericalangle(S_1; S_2) = \alpha$. $\sphericalangle(m_1; e_2) = 90° - \alpha$ és $\sphericalangle(m_2; e_1) = 90° - \alpha \Rightarrow \sphericalangle(m_1; m_2) = 90° + 90° - \alpha = \underline{180° - \alpha}$. Az ellentétes féltérben levő félegyenesekre: $\sphericalangle(m_1'; m_2') = \sphericalangle(m_1; m_2) = \underline{180° - \alpha}$, mert csúcsszögek.

1641. Legyen az adott S sík adott pontja P. Fektessünk az S síkban P-n át tetszőleges egyenest $\Rightarrow e'$. $T \in e'$, $P \neq T$ tetszőleges. T-ben merőleges S-re $\Rightarrow f$. $[e'; f] = S'$, $S' \perp S$. S'-ben P-n át e'-vel α szöget bezáró e egyenes (S'-ben két ilyen egyenes lehetséges). P-n át végtelen sok e' egyenes húzható, így végtelen sok megoldás lehet.

1642. $PT_PE\triangle$-ben ⊾ és 60°-os szög van $\Rightarrow m = EP \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow EP = \frac{2}{\sqrt{3}} m$. $PT_PF\triangle$-ből $FP = \frac{2}{\sqrt{3}} m$. $EFP\triangle$ egyenlő szárú, szárszöge $60° \Rightarrow EFP\triangle$ szabályos $\Rightarrow EF = \underline{\underline{\frac{2}{\sqrt{3}} m}}$.

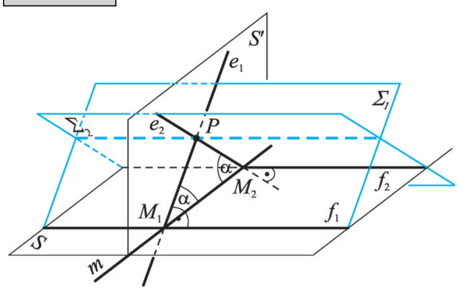
1643. Adott az S sík e egyenesének P pontja. Vegyünk fel P-ben e-re merőleges S' síkot. $S \cap S' = f'$. f'-vel α szöget bezáró egyenes P-n át az S' síkban $\Rightarrow f_1; f_2$. f_1 és f_2 megfelelők, mert $\sphericalangle(f_1; f') = \sphericalangle(f_1; S)$ és $\sphericalangle(f_2; f') = \sphericalangle(f_2; S)$, továbbá $P \in f_1$; $P \in f_2$ és $f_1 \perp e$; $f_2 \perp e$. Két megoldás van.

1644. Adott az S sík, a P pont és az α szög. Fektessünk P-n át S-re merőleges síkot $\Rightarrow S'$. $S \cap S' = m$. S'-ben P-n át m-mel α szöget bezáró egyenes $\Rightarrow e_1$; e_2. $e_1 \cap m = M_1$ és $e_2 \cap m = M_2$. M_1-ben merőleges S'-re $\Rightarrow f_1$; M_2-ben merőleges S'-re $\Rightarrow f_2$. f_1, e_1 síkja Σ_1; f_2, e_2 síkja Σ_2. Σ_i megfelelő, mert $P \in \Sigma_i$, $\sphericalangle(\Sigma_i; S) = \sphericalangle(e_i; m) = \alpha$, ugyanis $f_i \perp S' \Rightarrow f_i \perp m$ és $f_i \perp e_i$. Egy felvett S' síkhoz két megoldás van. P-n át akárhány S-re merőleges S' sík fektethető, így végtelen sok megoldás van. Mindegyik tekinthető egy P csúcsú $(180° - 2\alpha)$ nyílásszögű kúp érintősíkjának.

1645. Legyen S_1 és S_2 a két adott sík és P az adott pont. $S_1 \cap S_2 = m$. P-ből merőleges S_1-re $\Rightarrow$ talppontja T_1 és P-ből merőleges S_2-re $\Rightarrow$ talppontja T_2. $[PT_1T_2] = S$, $S \cap m = M$. T_2M az S_2 és S sík metszésvonala. $PT_2 \perp S_2 \Rightarrow \underline{PT_2 \perp T_2M}$ és $PT_2 \perp m$. $PT_1 \perp S_1 \Rightarrow PT_1 \perp T_1M$ és $PT_1 \perp m$. A fentiekből $\Rightarrow m \perp [PT_1T_2] \Rightarrow \underline{m \perp T_2M}$. Az aláhúzott állításokból $\Rightarrow \sphericalangle(S; S_2) = \sphericalangle(m; PT_2) =$ ⊾. Hasonlóan belátható, hogy $\sphericalangle(S; S_1) = \sphericalangle(m; PT_1) =$ ⊾. S a keresett sík.

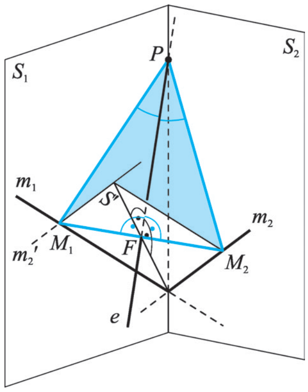
1646. Legyen P és Q a két adott pont és S az adott sík. Legyenek T_P és T_Q az S sík olyan pontjai, amelyekre: $PT_P \perp S$ és $QT_Q \perp S$. $[PT_PQ] = S'$. $S' \cap S = e(T_P; T_Q) = m$. $S' \perp S$, mert $PT_P \perp S \Rightarrow PT_P$ merőleges S minden egyenesére, így $PT_P \perp m$, $PT_P \perp f$ miatt $\sphericalangle(S; S') = \sphericalangle(PT_P; f) =$ ⊾.

1644.

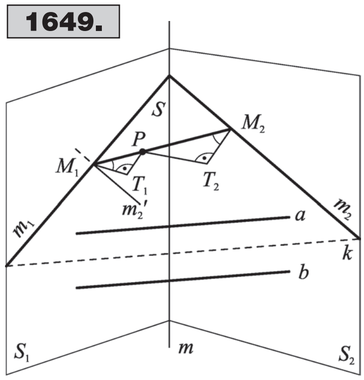


1647. Legyen az S_1 és S_2 sík metszésvonala m. Az egyik sík P pontjából a metszésvonalra, illetve a másik síkra bocsátott merőleges szakaszok további végpontjait jelöljük T_1-gyel, illetve T_2-vel. $PT_1 = 2PT_2$. $PT_1T_2\triangle$-ben $PT_2T_1\sphericalangle =$ ⊾, az átfogó kétszerese az egyik befogónak $\Rightarrow T_1PT_2\sphericalangle = 60° \Rightarrow PT_1T_2\sphericalangle = 30°$ (*). $PT_2 \perp S_2 \Rightarrow PT_2 \perp T_1T_2$ és $PT_2 \perp m$. Ez utóbbihoz $\underline{PT_1 \perp m}$ állítást felhasználva $\Rightarrow m \perp [PT_1T_2] \Rightarrow \underline{T_1T_2 \perp m}$. Az aláhúzott állításokból $PT_1T_2\sphericalangle = \sphericalangle(S_1; S_2)$. A (*) állítást figyelembe véve $\sphericalangle \underline{\underline{(S_1; S_2) = 30°}}$.

1648.

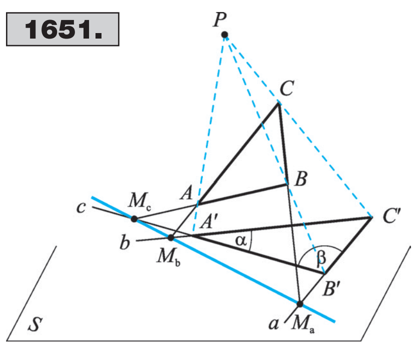


1649.

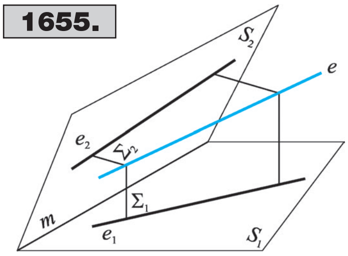


1648. Induljunk ki a kész ábrából. e felezi az $M_1PM_2\sphericalangle$-et $\Rightarrow PM_1 = PM_2$ esetén $M_1M_2P\triangle$ egyenlő szárú, és e merőlegesen felezi M_1M_2-t.
Legyen $F \in e$ tetszőleges. Fektessünk e-re merőleges S' síkot F-ben. $S' \cap S_1 = m_1$, $S' \cap S_2 = m_2$, $m_1 \cap m_2 = Q$.
Feladatunk, hogy az S' sík $\sphericalangle(m_1; m_2)$ szögtartományában levő F ponton át olyan szelőt fektessünk, hogy annak szögtartományba eső részét F felezze. m_2-t tükrözzük F-re $\Rightarrow m_2'$; $m_2' \cap m_1 = M_1$. Tükrözzük M_1-et F-re $\Rightarrow M_2$. $[M_1M_2P]$ a keresett sík, mert $e \perp S'$ miatt $e \perp M_1M_2$, F felezi M_1M_2-t $\Rightarrow PF$ felezi $M_1PM_2\sphericalangle$-et.
1649. A keresett egyenes egyenlő távol van a-tól és b-től, ha illeszkedik a és b középpárhuzamosán átmenő síkok valamelyikére.
Legyen S a P-re és k-ra illeszkedő sík. $S \cap S_1 = m_1$ és $S \cap S_2 = m_2$. Ha a keresett egyenes egyenlő szögeket zár be S_1-gyel és S_2-vel, akkor $M_1PT_1\triangle \sim M_2PT_2\triangle$, mert két-két szögük egyenlő. A hasonlóság aránya $\lambda = \dfrac{PT_1}{PT_2}$, a P pont S_1, ill. S_2 síktól mért távolságainak aránya. Feladatunk oda vezetett, hogy az S sík m_1, m_2 által meghatározott szögtartományában P-n át olyan egyenest fektessünk, amelynek szögszárak közé eső szakaszát P a fenti arányban osztja. Alkalmazzunk m_2-re P középpontú, λ arányú hasonlóságot $\Rightarrow m_2'$; $m_2' \cap m_1 = M_1$. M_1P a keresett egyenes.
1650. Toljuk az a egyenes tetszőleges M pontjába a b és a c egyenest $\Rightarrow b'$ és c'.
Legyen a keresett sík Σ. $\sphericalangle(\Sigma; c) = \sphericalangle(\Sigma; c')$ és $\sphericalangle(\Sigma; b) = \sphericalangle(\Sigma; b')$. $\sphericalangle(\Sigma; c') = \sphericalangle(\Sigma; b') = \sphericalangle(\Sigma; a)$, ha az M kezdőpont és Σ közti MC', MB' és MA szakaszok egyenlő hosszúak. Mérjünk fel M-ből az egyenesek egyik-egyik félegyenesére egyenlő szakaszokat $\Rightarrow A, B'\ C'$. Fektessünk P-n át $[AB'C']$ síkkal párhuzamos síkot $\Rightarrow \Sigma$. Σ megfelel minden feltételnek, mert: ① P-re illeszkedik. ② $\sphericalangle(\Sigma; c') = \sphericalangle(\Sigma; b') = \sphericalangle(\Sigma; a)$.
1651. A hasonló háromszög szögei $\Rightarrow \alpha$ és β. Az 1606. feladatban láttuk, hogy az $ABC\triangle$ és a szerkesztendő $A'B'C'\triangle$ megfelelő oldalpárjainak metszéspontjai (M_c, M_b, M_a) egy egyenesen vannak, a két háromszög síkjainak metszésvonalán. Ezek a metszéspontok megadhatók: $e(A; C) \cap S = M_b$; $e(A; B) \cap S = M_c$; $e(B; C) \cap S = M_a$. Vegyünk fel M_a-n át tetszőleges egyenest $\rightarrow a$. M_c-ből a-val β szöget bezáró egyenes $\rightarrow c \Rightarrow c \cap a = B'$. M_b-ből c-vel α szöget bezáró egyenes $\rightarrow b \Rightarrow b \cap c = A'$ és $b \cap a = C'$. Az adott szögeket bezáró egyenesek közül azok adnak megoldást, amelyeknek a metszéspontjaiból olyan háromszög keletkezik, amiben α és β belső szög. Az 1606. feladatban

1651.



1655.



láttuk, hogy az így megadott $A'B'C'\triangle$-re AA', BB' és CC' egyenesek egy pontban metszik egymást $\Rightarrow P$. Ha $[ABC]$ sík párhuzamos S-sel vagy $A'B'C'\triangle$ nem hasonló az $ABC\triangle$-höz, akkor nincs megoldás. Minden más esetben az a egyenes tetszőleges választása miatt végtelen sok megoldás lehet.

1652. Jelöljük az adott pontot P-vel, a metsző síkokat S_1-gyel, S_2-vel, P merőleges vetületeit rendre T_1-gyel, T_2-vel. Fektessünk síkot a P, T_1 és T_2 pontokra $\rightarrow S$; $S\cap S_1 = m_1$; $S\cap S_2 = m_2$; $m_1\cap m_2 = M$. $PT_1\perp S_1 \Rightarrow \underline{PT_1\perp m}$ és $PT_1\perp m_1$. $PT_2\perp S_2 \Rightarrow \underline{PT_2\perp m}$ és $PT_2\perp m_2$. Az aláhúzott állításokból $\Rightarrow$ $\Rightarrow m\perp [PT_1T_2] = S \Rightarrow m\perp m_1$ és $m\perp m_2 \Rightarrow m_2$ a T_2-ből m-re bocsátott merőleges; m_1 a T_1-ből m-re bocsátott merőleges $\Rightarrow m_1\cap m_2 = M\in m$. A bizonyítás fenti gondolatmenete független attól, hogy PM elválasztja-e a T_1 és T_2 pontokat vagy sem.

1653. Jelöljük az S_1, S_2 metsző síkokon adott pontokat P_1-gyel, P_2-vel. Tekintsük az M, P_1, P_2 pontokra illeszkedő síkot $\rightarrow S$. $m\perp m_1$ és $m\perp m_2 \Rightarrow m\perp S$. Az S síkban állítsunk merőlegest P_2-ben MP_2-re, P_1-ben MP_1-re. A merőlegesek metszéspontja P. $m\perp S \Rightarrow m\perp PP_1$; P származtatása miatt $m_1\perp PP_1 \Rightarrow PP_1\perp S \Rightarrow P_1$ a P pont S_1-re vetett merőleges vetülete. Hasonlóan belátható, hogy P_2 a P pont S_2-re vetett merőleges vetülete.

1654. 1. eset: Az e egyenes nem merőleges az S síkra. Legyen az e egyenes két pontja P és Q, merőleges vetületük T_P és T_Q. PT_P és QT_Q párhuzamosak $\Rightarrow PQT_QT_P$ trapéz $\Rightarrow P$, Q, T_P, T_Q egy síkban vannak $\Rightarrow T_Q\in [PQT_P]\cap S = m$. Tehát a merőleges vetületek egy egyenesen vannak.

2. eset: Az e egyenes merőleges az S síkra.

Bármely $P\in e$ esetén e egyben vetítő egyenes is, így $T_P = D$. A merőleges vetület egyetlen pont.

1655. Legyen Σ_1 az e_1-re illeszkedő S_1-re merőleges vetítősík, Σ_2 az e_2-re illeszkedő S_2-re merőleges vetítősík. $\Sigma_1\cap\Sigma_2$ a vetített alakzat, ami két különböző metsző sík esetén valóban egyenes. Ha $\Sigma_1\equiv\Sigma_2$, akkor bennük bármilyen alakzat képe S_1-re, illetve S_2-re e_1, illetve e_2 lesz. Ez akkor fordul elő, ha $e_1\perp m$, $e_2\perp m$ és $e_1\cap e_2\in m$.

1656. Legyen a két egyenes e_1 e_2, merőleges vetületük e_1' és e_2'.

1. eset: Sem a két párhuzamos egyenes, sem azok síkja nem merőleges a vetületi síkra. e_1 vetülete e_1, e_2 vetülete e_1'; $e_1'\neq e_2'$. Tegyük fel, hogy $e_1{}'$ nem párhuzamos e_2'-vel $\Rightarrow$ van metszéspontjuk: M'. M' őse M. $M\in e_1$, mert $M'\in e_1'$ és $M\in e_2$, mert $M'\in e_2'$. Ez ellentmond e_1 és e_2 párhuzamosságának.

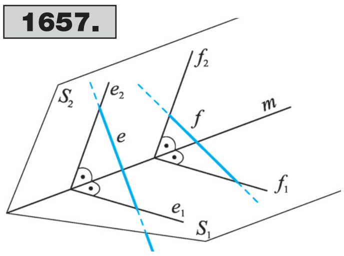
2. eset: A két párhuzamos egyenes nem merőleges a vetületi síkra, de a síkjuk igen. e_1 és e_2 vetítősíkja azonos, így vetületeik megegyeznek, egy egyenest alkotnak.

3. eset: A két párhuzamos egyenes merőleges a vetületi síkra. Mindkét egyenes merőleges a vetületi síkra, vetületük egy-egy pont.

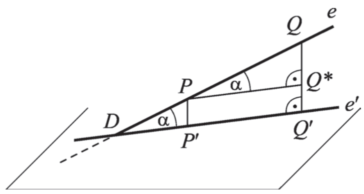
1657. Az állítás nem igaz olyan e és f kitérő egyenesek esetén, amelyek e_1, e_2, illetve f_1, f_2 vetületeire $[e_1;e_2]\perp m$ és $[f_1;f_2]\perp m$. Az állítás minden más esetre igaz.

1658. 1. eset: $0 < \alpha < 90°$. Húzzunk párhuzamost P-n át e'-vel $\Rightarrow Q^*$. $P'Q'$ párhuzamos PQ^*-gal és PP' párhuzamos $Q'Q^*$-gal $\Rightarrow P'Q'Q^*P$ paralelogramma $\Rightarrow P'Q' = PQ^*$.

1657.



1658.



$QPQ^*\sphericalangle = \alpha$, mert $QPQ^*\sphericalangle$ és $QDQ'\sphericalangle$ egyállásúak. PQ^*Q derékszögű háromszögben $\cos\alpha = \frac{PQ^*}{PQ} \Rightarrow PQ^* = PQ \cdot \cos\alpha \Rightarrow P'Q' = PQ^* = \underline{\underline{PQ \cdot \cos\alpha}}$.

2. eset: $\alpha = 0°. \Rightarrow Q \equiv Q^*$; $P'Q' = PQ^* = PQ \cdot \cos 0° = PQ$.

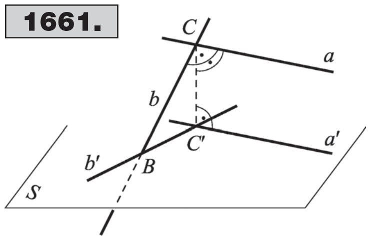
3. eset: $\alpha = 90°. \Rightarrow D \equiv P' \equiv Q'$: $d(P';Q') = 0 \Rightarrow P'Q' = PQ \cdot \cos 90° = 0$.

1659. Legyen a két szakasz AB és CD, merőleges vetületük az S síkon $A'B'$ és $C'D'$.
1. eset: A két szakasz síkja merőleges a vetületi síkra. A és C; B és D merőleges vetülete egybeesik, így a két szakasz vetülete ugyanaz a szakasz, vagy $A'B'$ és $C'D'$ egy egyenesre esik és $A'B' = AB \cdot \cos\ \alpha = CD \cdot \cos\ \alpha = C'D'$.
2. eset: A két szakasz síkja nem merőleges a vetületi síkra. A két szakasz S_1, illetve S_2 vetítősíkja párhuzamos $\Rightarrow S \cap S_1 = m_1$ és $S \cap S_2 = m_2$, m_1 és m_2 párhuzamosak $\Rightarrow A'B'$ és $C'D'$ párhuzamosak. Az 1658. feladatban láttuk, hogy $A'B' = AB \cdot \cos\alpha_1$ és $C'D' = CD \cdot \cos\alpha_2$. AB és CD párhuzamossága miatt $\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow A'B' = C'D'$.

1660. **1. eset:** A szakasz merőleges a vetületi síkra. Ebben az esetben a vetület egyetlen pont, nem keletkezik szakasz.
2. eset: A szakasz nem merőleges a vetületi síkra, és mindkét végpontja a vetületi sík által határolt ugyanazon féltérben van. Legyen az AB szakasz felezőpontja F, merőleges vetületeik $A'B'$ és F'. FF', AA' és BB' párhuzamos szakaszok; F felezi AB-t $\Rightarrow FF'$ az $A'B'BA$ trapéz középvonala $\Rightarrow F'$ felezi $A'B'$-t.
3. eset: A szakasz nem merőleges a vetületi síkra, és két végpontját a sík elválasztja egymástól. A vetületi síkra merőleges irányú eltolással a szakasz a 2. esetben ismertetett helyzetbe hozható. Mivel az eredeti szakasznak és az eltolt szakasznak ugyanaz a merőleges vetülete, az állítást erre az esetre is beláttuk.

1661. **1. eset:** Az egyik szár párhuzamos a vetületi síkkal, a másik szár nem merőleges a vetületi síkra. *a)* Megmutatjuk, hogy ha $a \perp b$, akkor $a' \perp b'$. Legyen $a \parallel S$, és a vetülete a', b vetülete b'. $CC' \perp S \Rightarrow CC' \perp a' \Rightarrow \underline{CC' \perp a}$. A feltétel szerint $\underline{b \perp a}$. E kettőből $\Rightarrow a \perp [BCC'] \Rightarrow a \perp BC' \Rightarrow$ $\Rightarrow a' \perp b'$. *b)* Megmutatjuk, hogy ha $a' \perp b'$, akkor $a \perp b$. $a' \perp b'$ és $CC' \perp a' \Rightarrow a' \perp [BC'C] \Rightarrow a' \perp b \Rightarrow a \perp b$.

1661.

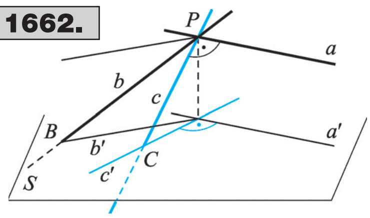


2. eset: Az egyik szár párhuzamos a vetületi síkkal, a másik szár merőleges a vetületi síkra. Ha $b \perp S$ és $a \parallel S$, akkor a vetület az a' félegyenes, rajta a C' ponttal.

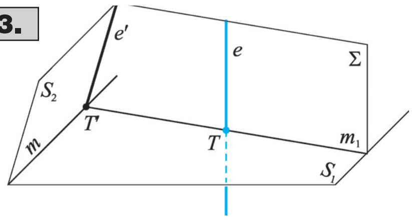
1662. $a \parallel S \Rightarrow a' \parallel a$. Vegyük fel a és b síkjában a P-re illeszkedő, a-ra merőleges egyenest $\Rightarrow c$. Az 1661. feladatban láttuk, hogy ha $\sphericalangle(a;c) = ⊾$ és $a \parallel S$, akkor $\sphericalangle(a';c') = ⊾$. Ha $\sphericalangle(b;a) > ⊾$, akkor c a $\sphericalangle(b;a)$ szögtartományban van $\Rightarrow c'$ a $\sphericalangle(b';a')$ szögtartományban van $\Rightarrow \sphericalangle(b';a') > ⊾$. Ha $\sphericalangle(b;a) < ⊾$, akkor b a $\sphericalangle(c;a)$ szögtartományban van $\Rightarrow b'$ a $\sphericalangle(c';a')$ szögtartományban van $\Rightarrow \sphericalangle(b';a') < ⊾$.

1663. Legyen az e egyenest S_2-re vetítő sík Σ. $\Sigma \cap S_1 = m_1$ és $\Sigma \cap S_2 = e'$. T képe $T' \Rightarrow$ $\Rightarrow TT' \perp S_2 \Rightarrow \underline{e(T;T') = m_1 \perp m}$. $e \perp S_1 \Rightarrow \underline{e \perp m}$. Az aláhúzott állításokból $\Rightarrow m \perp [T, T', e] =$ $= \Sigma \Rightarrow m \perp e'$.

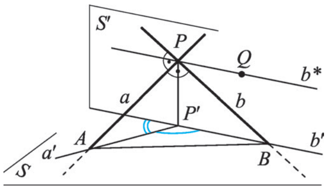
1662.



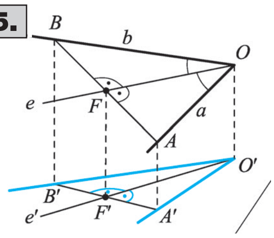
1663.



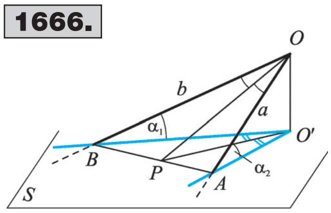
1664.



1665.



1666.



1664. Vegyük a b egyenes S-re merőleges vetítősíkját $\to S'$. Legyen $S \cap S' = b'$. Fektessünk P-n át b'-vel párhuzamos egyenest S'-ben $\to b^*$. $a \perp b$, de a nem merőleges S'-re $\Rightarrow APQ\sphericalangle$ tompaszög. $APQ\sphericalangle$ b^* szára párhuzamos S-sel, így az 1662. feladat szerint $APQ\sphericalangle$ képe is tompaszög $\Rightarrow AP'B\sphericalangle >$ ⊾. Ha $APB\sphericalangle$ kiegészítő szögét nézzük, annak képe az $AP'B\sphericalangle$ kiegészítő szöge lesz, ami a fentiek szerint ⊾-nél kisebb.

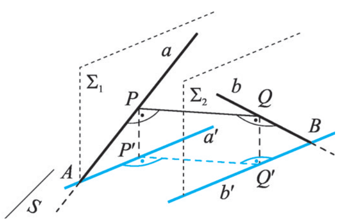
1665. Jelöljük az OC szögfelezőt e-vel, $e \parallel S$. Vegyünk fel az adott szög száraira $OB = OA$ szakaszokat. $AB \cap e = F$; F felezi AB-t és $OFB\sphericalangle = OFA\sphericalangle =$ ⊾, mert az $AOB\triangle$ egyenlő szárú. Az 1661. feladatban láttuk, hogy OFA derékszög képe $O'F'A'$ szintén derékszög, mivel $FO \parallel S$. Hasonlóan belátható, hogy $B'F'O'\sphericalangle =$ ⊾. Az 1660. feladatban láttuk, hogy az F felezéspont merőleges vetülete is felezéspont $\Rightarrow B'F' = F'A'$. $B'A'O'\triangle$ egyenlő szárú, mert alaphoz tartozó magassága felezi az alapot $\Rightarrow F'O'$ felezi a $B'O'A'\sphericalangle$-et.

1666. I. Megmutatjuk, hogy ha $OBO'\sphericalangle = OAO'\sphericalangle$, akkor $O'P$ is szögfelező.
$OBO'\triangle \cong OAO'\triangle$, mert OO' oldaluk közös, mindkettő derékszögű és $OBO'\sphericalangle = OAO'\sphericalangle \Rightarrow$ $\Rightarrow BO' = AO'$ és $BO = AO$. $AOB\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow PO$ szögfelező merőlegesen felezi az alapot. BPO derékszög képe $BPO'\sphericalangle$ szintén derékszög (1661. feladat). Hasonlóan $APO'\sphericalangle =$ ⊾ $\Rightarrow PO'$ az ABO' egyenlő szárú háromszög alaphoz tartozó magassága $\Rightarrow PO'$ felezi a $BO'A\sphericalangle$-et.
II. Megmutatjuk, hogy ha OP is, OP' is szögfelező, akkor $OBO'\sphericalangle = OAO'\sphericalangle$. $OB = b \Rightarrow O'B =$ $= b \cdot \cos\alpha_1$; $OA = a \Rightarrow O'A = a \cdot \cos\alpha_2$ (1658. feladat). OP szögfelező az $AOB\triangle$-ben, így a szögfelező tétel miatt $BP : PA = b : a$. $O'P$ szögfelező az $AO'B\triangle$-ben, így a szögfelező tételből $BP : PA = (b \cdot \cos\alpha_1) : (a \cdot \cos\alpha_2)$. A két összefüggésből $b : a = (b \cdot \cos\alpha_1) : (a \cdot \cos\alpha_2) \Rightarrow \cos\alpha_1 =$ $= \cos\alpha_2 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow OBO'\sphericalangle = OAO'\sphericalangle$.

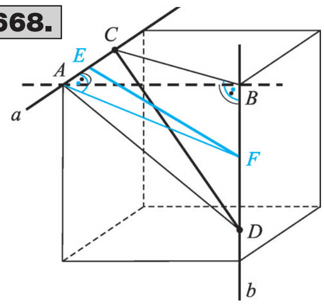
1667. P, Q a normáltranszverzális a-ra, illetve b-re illeszkedő pontja. $PQ \parallel S$, P képe P', Q képe Q'. $QPA\sphericalangle =$ ⊾ és $PQ \parallel S \Rightarrow Q'P'A\sphericalangle =$ ⊾ (1661. feladat). Hasonlóan $PQB\sphericalangle =$ ⊾ és $PQ \parallel S \Rightarrow$ $\Rightarrow P'Q'B\sphericalangle =$ ⊾. a' és b' olyan egyenesek, amelyek mindketten merőlegesek a $P'Q'$ szakaszra $\Rightarrow$ $\Rightarrow a' \parallel b'$. Ha $a \perp S$ vagy $b \perp S$, akkor képük egyetlen pont, A, illetve B.

1668. Legyen a feltételeknek eleget tevő a és b egyenes egy kocka két kitérő élének egyenese. AB a normáltranszverzális $\Rightarrow AB \perp AC$ és $AB \perp BD \Rightarrow ACB\triangle$ és $ABD\triangle$ derékszögű. $BD \perp AC$ és $BD \perp AB$ miatt $BD \perp [ABC] \Rightarrow BD \perp CB \Rightarrow CBD\triangle$ derékszögű.
Pitagorasz-tétel az $ACB\triangle$-re, az $ABD\triangle$-re és a $CBD\triangle$-re: $AC^2 + AB^2 = BC^2$; $AB^2 + BD^2 =$ $= AD^2$; $CB^2 + BD^2 = CD^2$. A vizsgált összeg: $AC^2 + AD^2 + BD^2 + BC^2 = (BC^2 - AB^2) +$ $+ (AB^2 + BD^2) + CD^2 = BC^2 + BD^2 + CD^2 = 2CD^2 =$ állandó.

1667.



1668.

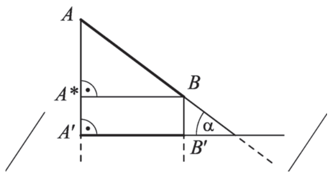


II

1669. Tekintsük az 1668. ábrát. Jelképezze a két kitérő egyenest egy kocka két kitérő élének egyenese. $BD \perp AB$ és $BD \perp AC \Rightarrow BD \perp [ABC] \Rightarrow BD \perp BC \Rightarrow CBD\triangle$ derékszögű, alkalmazható rá a Pitagorasz-tétel: $CD^2 = CB^2 + BD^2$ (1). $CAB\sphericalangle = \llcorner \Rightarrow CAB\triangle$-re alkalmazható a Pitagorasz-tétel: $CB^2 = AC^2 + AB^2$ (2). A (2) összefüggést (1)-ben felhasználva: $CD^2 = AC^2 + AB^2 + BD^2 \Rightarrow CD^2 - AB^2 = AC^2 + BD^2$ (*). $AE \perp [ABD] \Rightarrow AE \perp AF \Rightarrow EAF\triangle$ derékszögű, alkalmazható rá a Pitagorasz-tétel: $EF^2 = EA^2 + AF^2$ (3). $ABF\triangle$ derékszögű, alkalmazható rá a Pitagorasz-tétel: $AF^2 = AB^2 + BF^2$ (4). (4) összefüggést (3)-ban felhasználva: $EF^2 = EA^2 + AB^2 + BF^2 = \frac{1}{4}AC^2 + AB^2 + \frac{1}{4}BD^2 = AB^2 + \frac{1}{4}(AC^2 + BD^2)$ (*)-ot felhasználva: $EF^2 = AB^2 + \frac{1}{4}(CD^2 - AB^2) \Rightarrow EF = \sqrt{\frac{3}{4}AB^2 + \frac{1}{4}CD^2}$ = állandó.

1670. $A'B' = AB \cdot \cos\alpha = 12 \cdot \cos 30° = \underline{\underline{6 \cdot \sqrt{3}\text{ m}}}$.

1670.



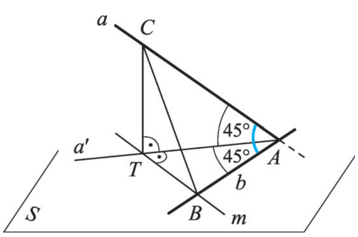
1671. *a)* $\alpha = 60°$; *b)* $\alpha = 45°$.

1672. Legyen P' a P pont merőleges vetülete a síkon $\Rightarrow AP'P\sphericalangle = BP'P\sphericalangle = \llcorner$. $AP' : P'B = m : n \Rightarrow AP' = mx$ és $P'B = nx$. Pitagorasz-tétel az $AP'P\triangle$-re: $PP'^2 = a^2 - m^2x^2$ (1). Pitagorasz-tétel az $BP'P\triangle$-re: $PP'^2 = b^2 - n^2x^2$ (2). (1)- és (2)-ből $a^2 - m^2x^2 = b^2 - n^2x^2 \Rightarrow x^2 = \frac{a^2 - b^2}{m^2 - n^2}$, x^2-et (1)-be visszahelyettesítve: $PP' = \underline{\underline{\sqrt{\frac{b^2m^2 - a^2n^2}{m^2 - n^2}}}}$ összefüggést kapunk. A számadatokkal $PP' = 132$ m.

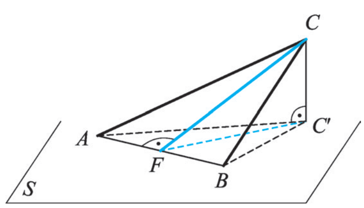
1673. $CT = TA$, mert $CTA\triangle$ egyenlő szárú, derékszögű. Állítsunk merőlegest T-ben TA-ra $\Rightarrow m$. $m \cap b = B$. $BT = TA$, mert $BTA\triangle$ egyenlő szárú, derékszögű. $CT \perp S \Rightarrow CT \perp TB \Rightarrow CTB\triangle$ derékszögű; $CT = TA = BT$ miatt $CTB\triangle$ egyenlő szárú, derékszögű. $CTB\triangle \cong CTA\triangle$, mert CT oldaluk közös $\Rightarrow \underline{CB = CA}$. $CTB\triangle \cong ATB\triangle$, mert TB oldaluk közös $\Rightarrow \underline{CB = AB}$; Az aláhúzott állításokból $\Rightarrow ABC\triangle$ szabályos $\Rightarrow \sphericalangle(a; b) = 60°$.

1674. $ABC\triangle$ egyenlő szárú $\Rightarrow FC$ alaphoz tartozó magasságának FC' vetülete a vetületi háromszög magassága.
Pitagorasz-tétel az AFC derékszögű háromszögre: $FC^2 = 25^2 - 20^2 \Rightarrow FC = 15$ m. Pitagorasz-tétel az $FC'C$ derékszögű háromszögre: $FC'^2 = 15^2 - 7^2 \Rightarrow FC' = 4\sqrt{11}$ m. $T_{ABC'} = \frac{40 \cdot 4\sqrt{11}}{2} = 80\sqrt{11}\text{ m}^2 \approx \underline{\underline{265{,}33\text{ m}^2}}$.

1673.



1674.



1675. Jelöljük az ABC háromszög középpontját T-vel, a szakasz felső végpontját D-vel. $DT \perp [ABC] \Rightarrow DT \perp TC \Rightarrow DTC\sphericalangle = ⊾$. T az $ABC\triangle$ súlypontja $\Rightarrow TC = \frac{a\sqrt{3}}{3}$, ahol a a háromszög oldala. Pitagorasz-tétel a $DTC\triangle$-re: $c^2 = b^2 + \frac{a^2}{3} \Rightarrow a = \sqrt{3\left(c^2 - b^2\right)}$. A szabályos háromszög területe: $T = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \underline{\underline{\frac{3\sqrt{3}\left(c^2 - b^2\right)}{4}}}$.

Kocka

1676. $\underline{\underline{27 \text{ részre}}}$.

1677. Az ábra szerint kiválasztott E, B, G csúcspontok síkja nem tartalmaz negyedik csúcsot. A síkhoz egyértelműen hozzárendelhető a levágott tetraéder F csúcsa. A kocka 8 csúcsához 8 sík rendelhető, így $\underline{\underline{8\text{-féleképpen}}}$ tudunk három alkalmas csúcsot választani.

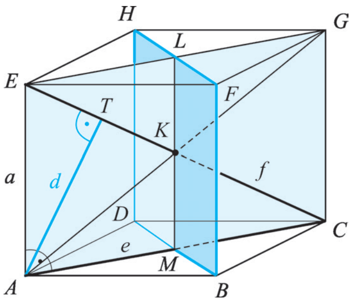
1678. Tekintsük az 1677. ábrát. Minden párhuzamos lappárhoz 2 átlós sík tartozik. 3 db párhuzamos lappár van, így összesen $\underline{\underline{6 \text{ db}}}$ az átlós síkok száma.

1679. Tekintsük az 1677. ábrát. Lapátló: $e = a\sqrt{2}$. Testátló: $f = a\sqrt{3}$. Körülírt gömb sugara: $KE = R = \frac{f}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Beírt gömb sugara: $KL = r = \frac{a}{2}$.

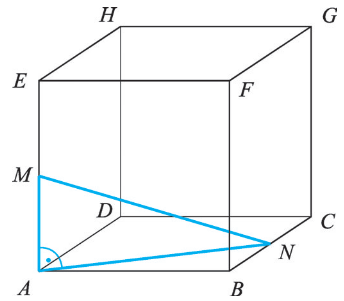
1680. Tekintsük az 1677. ábrát. Felhasználjuk: $e = a\sqrt{2}$, $f = a\sqrt{3}$. A testátlóra illeszkedő csúcsok távolsága 0. A többi csúcs mindegyike egy olyan derékszögű háromszög csúcsa, melynek befogói egy él, illetve egy lapátló, átfogója egy testátló. Írjuk fel az $ACE\triangle$ területét kétféleképpen: $T_{ACE} = \frac{a \cdot a\sqrt{2}}{2}$, illetve $T_{ACE} = \frac{a\sqrt{3} \cdot d}{2} \Rightarrow \frac{a^2\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{3}d}{2} \Rightarrow d = a\sqrt{\frac{2}{3}} = a\frac{\sqrt{6}}{3}$.

1681. $EA \perp [ABCD] \Rightarrow EA \perp AN \Rightarrow$ Pitagorasz-tétel az $MAN\triangle$-re: (1) $MA^2 + AN^2 = MN^2$. Pitagorasz-tétel az $ABN\triangle$-re: (2) $AB^2 + BN^2 = AN^2$. (2) és (1): $MA^2 + AB^2 + BN^2 = MN^2$. $MA = \frac{a}{2}$, $AB = a$, $BN = \frac{a}{2}$. $\frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{a^2}{4} = MN^2 \Rightarrow MN = \underline{\underline{a\sqrt{\frac{3}{2}}}} = \underline{\underline{\frac{a\sqrt{6}}{2}}}$.

1677.



1681.



1682. Tekintsük az 1677. ábrán az EC testátlót és a hozzá képest kitérő BF élt. Legyen $e(E;C) = g$ és $e(B;F) = h$. Húzzunk párhuzamost a testátló felezőpontján át h-val $\Rightarrow h' = e(K;L)$. g és h' metsző egyenesek síkja S, a kocka egyik átlós síkja. h párhuzamos S-sel, $d(h;S) = d(h;g)$. h egy pontjából merőlegest állítunk az S síkra (pl. B-ből). A merőlegesnek B-től az S-ig terjedő szakasza fél lapátlóval egyenlő, $d(g;h) = d(h;S) = d(B;M) = \underline{\underline{\frac{a\sqrt{2}}{2}}}$.

1683. Tekintsük az 1677. ábrát. Két testátló egy átlós síkmetszet téglalap két átlója, az átlók szöge legyen φ. Például $GKC\sphericalangle = \varphi \Rightarrow KCM\sphericalangle = \frac{\varphi}{2}$. $KMC\sphericalangle = ⊾$ és $KM = \frac{a}{2}$, $KC = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

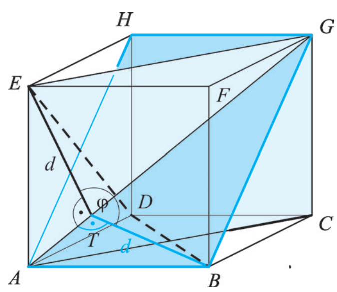
$$\Rightarrow \sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = 35{,}26° \Rightarrow \underline{\underline{\varphi = 70{,}53°}}.$$

1684. Tekintsük az 1677. ábrát. Jelöljük a testátló és egy él szögét ε-nal.
A keresett szög egy olyan derékszögű háromszög (pl. EAC) egyik hegyesszöge ($CEA\sphericalangle = \varepsilon$), amelyben a keresett szög melletti befogó az él (szöggel szembeni befogó a lapátló), átfogó a testátló. $EAC\triangle$-ben: $\cos\,\varepsilon = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\varepsilon = 54{,}74°}}$. A testátló minden éllel ugyanekkora szöget zár be, mert az egy csúcsba futó élek mindegyikénél a fenti gondolatmenet követhető, a többi pedig párhuzamos valamelyikkel, így a testátlóval a szögük megegyezik.

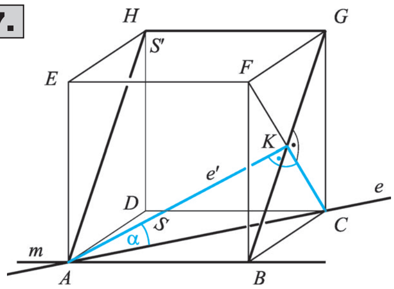
1685. Tekintsük az 1677. ábrát. Vetítsük merőlegesen a testátlót az egyik lapra. A vetület a lapátló lesz. (Például EC testátló merőleges vetülete az $ABCD$ lapon az AC lapátló.) A keresett szög a testátló és e lapátló szöge ($ECA\sphericalangle$). EAC derékszögű háromszögből: $\sin\alpha = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha \approx 35{,}26°}}$. A testátló mindegyik lappal ugyanekkora szöget zár be, mert a vetítésnél kapott derékszögű háromszögből minden esetben az éllel szemközti hegyesszöget keressük, miközben a testátló az átfogó.

1686. A két sík metszésvonala a kocka AG testátlója. ABG derékszögű háromszög átfogóhoz tartozó magassága és $EAG\triangle$ átfogóhoz tartozó magassága egyenlő, mert a fenti háromszögek egybevágók. A magasságok talppontja az AG szakasz ugyanazon T pontja, mert az egyenlő befogók találkoznak az A csúcsban. A fenti magasságok szöge az átlós síkok keresett szöge. $ETB\triangle$ egyenlő szárú, d szárainak hosszát az 1680. feladatból tudjuk: $d = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. A háromszög alapja az EB lapátló, hossza: $EB = a\sqrt{2}$. $\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2} : \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3}{a\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \frac{\varphi}{2} = 60° \Rightarrow \varphi = 120°$. $\Rightarrow$ Az átlós síkok hajlásszöge $\underline{\underline{60°}}$.

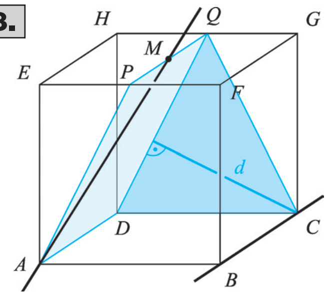
1686.



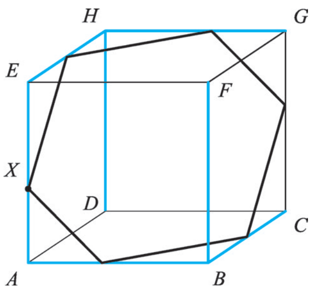
1687.



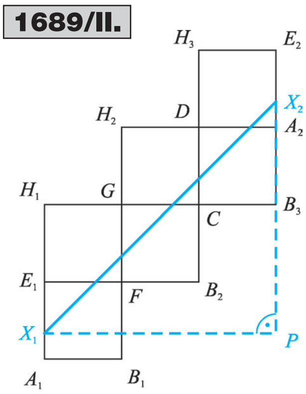
1688.



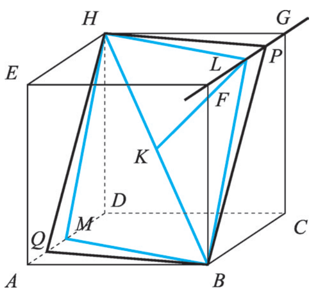
1689/I.



1689/II.



1690.



1687. Vigyük fel a térelemeket egy kockára: S a kocka alapsíkja $\to [ABCD]$. S' a kocka átlós síkja $\to [ABGH]$. $m = S \cap S'$ az alapél $\to e(A;B)$. e az alaplap átlója $\to e(A;C)$. e-t merőlegesen vetítjük S'-re: A képe önmaga. C képe K lapközéppont, mert $CK \perp BG$ és $CK \perp m \Rightarrow CK \perp S' \Rightarrow e' = e(A;K)$. $\sphericalangle(e;S') = \sphericalangle(e;e')$. AKC derékszögű háromszögben $\sin\alpha = \dfrac{CK}{AC} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 30°}}$.

1688. Húzzunk párhuzamost M-en és A-n át BC-vel $\to PQ, AD$. $ADQP$ paralelogramma $\Rightarrow [APQD] = S$ párhuzamos BC-vel. $d(AM; BC) = d(S; BC) = d(DQ; C)$. Pitagorasz-tétel a $QGC\triangle$-re: $QC^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow QC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$. $QD = QC = \dfrac{a\sqrt{5}}{2}$.

$T_{DCQ} = \dfrac{a \cdot a}{2} = \dfrac{a^2}{2}$, $T_{DCQ} = \dfrac{a\cdot\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{d}{2} \Rightarrow \dfrac{a^2}{2} = \dfrac{a\cdot\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{d}{2} \Rightarrow$

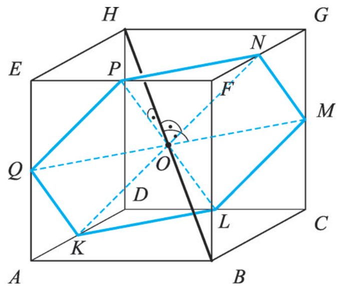
$\Rightarrow \underline{\underline{d = \dfrac{2\cdot a\cdot\sqrt{5}}{5}}}$ a két egyenes távolsága.

1689. Vágjuk fel a kocka felületét az 1689/I. ábrán jelzett éleken. A kocka kiterített hálóját az 1689/II. ábra mutatja. X_1-ből az X_2-be kell eljutni a kocka felületén, a legrövidebb úton. A hálón ez az X_1X_2 szakasz. $X_1PX_2\triangle$ egyenlő szárú, derékszögű: $X_1P = 3a$, $X_2P = 4a - E_2X_2 - X_1A_1 = 4a - (E_1X_1 + X_1A_1) = 4a - E_1A_1 = 3a \Rightarrow X_1X_2 = \underline{\underline{3a\sqrt{2}}}$.

1690. Az FG él tetszőleges P pontján és a HB testátlón átfektetett sík a $HPBQ$ paralelogrammában metszi a kockát. A paralelogramma területe a $HPB\triangle$ területének kétszerese. $HPB\triangle$ egyik oldala a HB testátló, ami bármely $P \in FG$ esetén ugyanakkora, így a keresett terület akkor minimális, ha P a legközelebb van HB-hez. HB és FG kitérők, így a normáltranszverzális FG-n levő talppontja adja a minimális területű síkmetszetet. Vetítsük a két egyenest a $DCGH$ lapra. HB képe HC, FG képe G. G és HC távolsága a normáltranszverzális hossza, $\dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (a lapközéppont és G távolsága) $\Rightarrow KL$ a keresett normáltranszverzális (L az FG él felezéspontja), $HLBM$ a minimális területű síkmetszet. Ehhez a testátlóhoz három megoldás tartozik.

1691. Legyen HB felezéspontja O. O felezi a PL, QM és KN szakaszokat, melyek hossza $a\sqrt{2}$, a lapátlóval egyenlő. PN középvonal az $EFG\triangle$-ben $\Rightarrow$ $PN=\frac{1}{2}EG=\frac{1}{2}a\sqrt{2}$. $OPN\triangle$ oldalai egyenlők $\Rightarrow PON\sphericalangle=60°$. Ugyanezt mondhatjuk a többi részháromszögről is $\Rightarrow O$-nál 6 db 60°-os szög teljesszöget tesz ki $\Rightarrow KLMNPQ$ hatszög szabályos. $HP=HQ=$ $=HK=HL=HM=HN$ miatt a testátló merőleges erre a síkmetszetre.

1691.

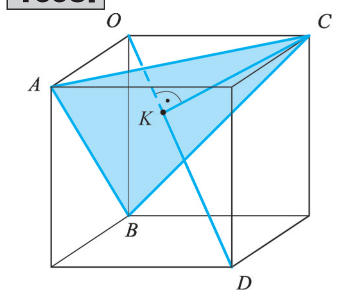


1692. Tekintsük az 1691. ábrát. Az 1690. feladatban láttuk, hogy a testátló és egy hozzá képest kitérő él normáltranszverzálisa a felezéspontjukat összekötő szakasz. $\Rightarrow$ A HB-hez kitérő élek felezéspontjait HB felezéspontjával összekötő szakaszok merőlegesek HB-re. $\Rightarrow$ Ezek az összekötő szakaszok benne vannak a HB-re O-ban állított merőleges síkban. Az 1691. feladatban láttuk, hogy a fenti élfelezéspontok szabályos hatszöget alkotnak, tehát a HB-re O-ban állított merőleges sík szabályos hatszögben metszi a kockát. A hatszög egy oldala az oldallapok átlójának fele, mivel középvonal az átló által létrehozott egyik háromszögben: $\underline{\underline{x=a\frac{\sqrt{2}}{2}}}$.

1693. Tekintsük az 1691. ábrát. Egy szakasz végpontjaitól egyenlő távol levő pontok halmaza a térben a szakaszfelező merőleges sík. Ennek a síknak a kocka felületével közös pontjait keressük. Az 1692. feladatban láttuk, hogy a HB testátló szakaszfelező merőleges síkja szabályos hatszögben metszi a kockát. Ennek a szabályos hatszögnek a kocka felületével közös pontjai a keresett pontok.

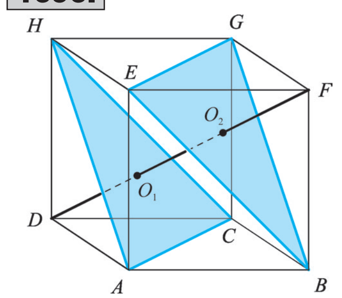
1694. A legnagyobb területű háromszög oldala a lehető leghosszabb. A kocka minden csúcsához tartozik egy ilyen háromszög, a csúcsból induló élek határozzák meg (például az 1686. ábrán F-hez $EBG\triangle$). A háromszög egy-egy oldala a kocka valamelyik lapátlója $\Rightarrow$ hossza $a\sqrt{2}$.

1695.



1695. $AO=BO=CO$, $AOC\triangle\cong COB\triangle\cong BOA\triangle\Rightarrow AC=$ $=CB=BA=a\sqrt{2}$. $AOD\sphericalangle=BOD\sphericalangle=COD\sphericalangle\Rightarrow ABCO$ szabályos háromoldalú gúla, melynek ABC laphoz tartozó magassága $OD\Rightarrow OD\perp[ABC]$. $OD\cap[ABC]=K$; K az $ABC\triangle$ súlypontja $\Rightarrow KC=\frac{a\sqrt{6}}{3}$. Pitagorasz-tétel az OKC derékszögű háromszögre: $OK^2=a^2-\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2\Rightarrow OK=\underline{\underline{\frac{a\sqrt{3}}{3}}}=\frac{OD}{3}$.

1696.



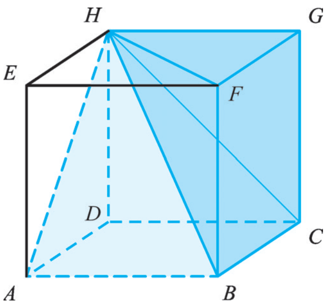
1696. **1. eset:** AH és BG, AH és FC távolsága: AH párhuzamos BG-vel $\Rightarrow$ d(AH; BG) $=a$, AH párhuzamos $[BCGF]$ síkkal $\Rightarrow$ d(AH; FC) $=a$.

2. eset: EB és AH távolsága: Toljuk el EB-t H-ba $\rightarrow HC$. $[AHC]$ sík párhuzamos EB-vel és $[AHC]$ sík párhuzamos $[EBG]$ síkkal, mert mindkettő az 1695. feladatban látott HB testátló-

II

ra merőleges sík, ami harmadolja a testátlót $\Rightarrow$ d(AH; EB) $= \mathrm{d}([AHC]; EB) = \mathrm{d}([AHC]; [EBG]) = \dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. Ugyanezt mondhatjuk el az AH átlónak BD, DG és GE átlóktól való távolságára is.

1697.



1697. Az ábra szerint a kocka három olyan négyzet alapú gúlára bontható, melynek oldalélei a, $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$ és $a\sqrt{2}$. Az ábra jelöléseivel a gúlák csúcsai: $ABCDH$; $GFBCH$; $EABFH$.

1698. Tekintsük az 1696. ábrát. Az 1695. feladatban láttuk, hogy az $[ACH]$ sík is, a $[BGE]$ sík is merőleges a DF testátlóra, és azzal való O_i döféspontjai harmadolják DE-t. Vetítsük a kocka A, H, C és D csúcsait az $[ACH]$ síkra. Az A, H és C pontok helyben maradnak, D képe O_1 lesz. Vetítsük a kocka B, G, E és F csúcsait a $[BGE]$ síkra. A B, G és E pontok helyben maradnak, F képe O_2 lesz. Az ACH részvetület és az EGH részvetület O_1, illetve O_2 középpontú egybevágó szabályos háromszögek páronként párhuzamos oldalakkal. Vetítsük mindkét háromszöget egy a DF testátlóra merőleges S síkra. $S \parallel [ACH] \parallel [EBG]$ miatt ez a vetítés egybevágóság, így helyzetükből adódóan E', A', B', C', G' és H' szabályos hatszöget alkotnak.

1699. *a)* $e = 8\sqrt{3}$ dm $\approx \underline{\underline{13{,}86\ \text{dm}}}$ és $A = \underline{\underline{384\ \text{dm}^2}}$.

b) $e = 12{,}6\sqrt{3}$ cm $\approx \underline{\underline{21{,}82\ \text{cm}}}$ és $A = \underline{\underline{952{,}56\ \text{cm}^2}}$.

c) $e = 423\sqrt{3}$ mm $\approx \underline{\underline{732{,}66\ \text{mm}}}$ és $A = 1\,073\,574\ \text{mm}^2 \approx \underline{\underline{1{,}07\ \text{m}^2}}$.

d) $e = 0{,}5\sqrt{3}$ m $\approx \underline{\underline{0{,}866\ \text{m}}}$ és $A = \underline{\underline{1{,}5\ \text{m}^2}}$.

1700. Az A, B és K pontokra illeszkedő sík a K-n átmenő, AB-vel párhuzamos egyenesben metszi a fedőlapot, ezért a síkmetszet az $ABCD$ téglalap. $BPC\triangle$-ben a Pitagorasz-tételt alkalmazva $BC^2 = a^2 + \dfrac{a^2}{4} \Rightarrow BC = a\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ és $T_{ABCD} = a^2\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. *a)* $T = \underline{\underline{71{,}55\ \text{dm}^2}}$. *b)* $T = \underline{\underline{177{,}5\ \text{cm}^2}}$.

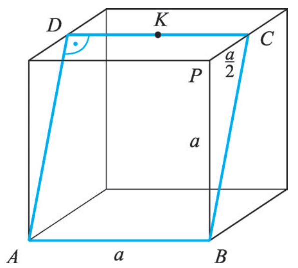
c) $T = \underline{\underline{200\,048{,}7\ \text{mm}^2}} \approx \underline{\underline{0{,}2\ \text{m}^2}}$. *d)* $T = \dfrac{\sqrt{5}}{8}\ \text{m}^2 \approx \underline{\underline{0{,}28\ \text{m}^2}}$.

1701. *a)* $a = 8\sqrt{3}$ dm $\approx \underline{\underline{13{,}86\ \text{dm}}}$ és $A = \underline{\underline{1152\ \text{dm}^2}}$. *b)* $a = 6\sqrt{3}$ cm $\approx \underline{\underline{10{,}4\ \text{cm}}}$ és $A = \underline{\underline{648\ \text{cm}^2}}$.

c) $a = 12\sqrt{3}$ mm $\approx \underline{\underline{20{,}78\ \text{mm}}}$ és $A = \underline{\underline{2592\ \text{mm}^2}}$. *d)* $a = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$ m $\approx \underline{\underline{0{,}29\ \text{m}}}$ és $A = \underline{\underline{0{,}5\ \text{m}^2}}$.

1702. *a)* $\underline{\underline{a = 56\ \text{dm}}}$. *b)* $\underline{\underline{a = 72\ \text{cm}}}$. *c)* $\underline{\underline{a = 1{,}6\ \text{m}}}$. *d)* $\underline{\underline{a = 69{,}1\ \text{mm}}}$.

1700.



1703. *a)* $V \approx \underline{\underline{2{,}82\ \text{dm}^3}}$. *b)* $V \approx 0{,}0518\ \text{dm}^3 \approx \underline{\underline{51{,}8\ \text{cm}^3}}$.

c) $V \approx \underline{\underline{1{,}85\ \text{dm}^3}}$. *d)* $V \approx \underline{\underline{1{,}06\ \text{dm}^3}}$.

1704. $a_1 \approx \underline{\underline{7{,}37\ \text{dm}}}$; $a_2 \approx \underline{\underline{1{,}59\ \text{dm}}}$.

1705. $V \approx 0{,}568\ \text{dm}^3$; $a \approx 0{,}828\ \text{dm} \approx \underline{\underline{8{,}28\ \text{cm}}}$.

1706. $a = \sqrt[3]{V} = \underline{\underline{4{,}64\ \text{dm}}}$.

1707. *a)* $V = \underline{\underline{42{,}875\ \text{cm}^3}}$. *b)* $V \approx \underline{\underline{68{,}04\ \text{cm}^3}}$.

c) $V \approx 0{,}068\ \text{m}^3 \approx \underline{\underline{68\ \text{dm}^3}}$.

1708. *a)* $A = \underline{\underline{1014\ \text{cm}^2}}$. *b)* $A \approx \underline{\underline{57{,}93\ \text{dm}^2}}$. *c)* $A \approx \underline{\underline{9{,}52\ \text{m}^2}}$.

1709. Az átlós síkmetszet olyan téglalap, melynek szomszédos oldalait a kocka egy éle és egy lapátlója alkotja. *a)* $T = a^2 \cdot \sqrt{2}$. *b)* $T \approx 855{,}83\ \text{cm}^2$. *c)* $T \approx 65{,}39\ \text{dm}^2$.

II

1710. *a)* $t = a^2 \cdot \sqrt{2} \Rightarrow$ a kocka éle $a = \underline{\underline{\sqrt{\frac{t}{\sqrt{2}}}}}$; a kocka lapátlója $e = a \cdot \sqrt{2} = \underline{\underline{\sqrt{t \cdot \sqrt{2}}}}$; a kocka testátlója $f = a \cdot \sqrt{3} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{3t}{\sqrt{2}}}}}$; a kocka felszíne $A = 6a^2 = \underline{\underline{\frac{6t}{\sqrt{2}}}}$; a kocka térfogata $V = a^3 = \underline{\underline{\left(\sqrt{\frac{t}{\sqrt{2}}}\right)^3}}$.

b) $a \approx \underline{\underline{13{,}29\ \text{cm}}}$; $e \approx \underline{\underline{18{,}8\ \text{cm}}}$; $f \approx \underline{\underline{23{,}03\ \text{cm}}}$; $A \approx \underline{\underline{1060{,}66\ \text{cm}^2}}$; $V \approx \underline{\underline{2350{,}38\ \text{cm}^3}}$.

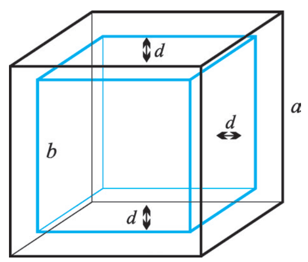
c) $a \approx \underline{\underline{6{,}73\ \text{mm}}}$; $e \approx \underline{\underline{9{,}51\ \text{mm}}}$; $f \approx \underline{\underline{11{,}65\ \text{mm}}}$; $A \approx \underline{\underline{271{,}53\ \text{mm}^2}}$; $V \approx \underline{\underline{304{,}44\ \text{mm}^3}}$.

1711. Legyen az eredeti oltárkő éle a, az új oltárkő éle b. $V_1 = a^3$, $V_2 = b^3$ és $V_2 = 2V_1$ összefüggéseket felhasználva: $b^3 = 2a^3 \Rightarrow \underline{\underline{b = a \cdot \sqrt[3]{2}}}$. A b szakasz hossza euklideszi szerkesztéssel nem adható meg, tehát az oltárkövet nem lehet elkészíteni.

1712. A két kocka éle a és $(a + 2)$. Térfogatuk különbsége $V_1 - V_2 = (a + 2)^3 - a^3 = 26\ \text{m}^3 \Rightarrow$ $\Rightarrow a = 1$ m. A kockák élei: $\underline{\underline{1\ \text{m}}}$, illetve $\underline{\underline{3\ \text{m}}}$.

1713. Felhasználhatjuk: Az átlós síkmetszet területe $a^2 \cdot \sqrt{2}$. Az átlóssík felezi a test térfogatát $\Rightarrow \underline{\underline{V = \frac{1}{2}a^3}}$. A keletkezett test felszínét megkapjuk, ha az eredeti felszín feléhez hozzáadjuk az átlós metszet területét $\Rightarrow \underline{\underline{A = \left(3 + \sqrt{2}\right)a^2}}$.

1714.



1714. A belső kocka éle $b = 10\ \text{dm} - 2 \cdot 0{,}2\ \text{dm} = 9{,}6\ \text{dm}$. $V = a^3 - b^3 = 10^3 - 9{,}6^3 \approx 115{,}26\ \text{dm}^3$. $m = V \cdot \rho \approx 115{,}26 \cdot 0{,}8 \approx 92{,}21$ kg. A láda nem merül el, ha a bemerülő rész térfogatának megfelelő víz tömege akkora, mint a láda teljes tömege. A teher tömege legfeljebb: $1000\ \text{kg} - 92{,}21\ \text{kg} \approx \underline{\underline{907{,}79\ \text{kg}}}$.

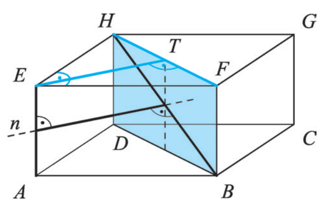
Téglatest

1715. EA él és BH átló egyenese kitérő egyenesek, távolságuk egyenlő az EA egyenes és a vele párhuzamos DH egyenest tartalmazó [$DBFH$] sík távolságával. Ez a távolság ugyanakkora, mint az E csúcs és a HF lapátló távolsága: $d(E; T)$.

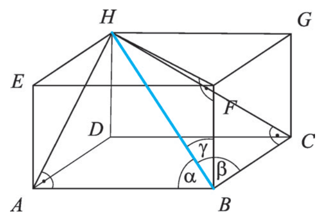
$$t_{EFH\triangle} = \frac{ab}{2} = \frac{FH \cdot ET}{2} \Rightarrow ET = \frac{ab}{FH} \text{ és } FH = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow ET = \underline{\underline{\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}}},$$

ugyanekkora az EA él és a DF testátló távolsága.

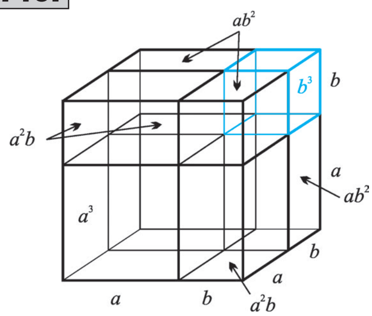
1715.



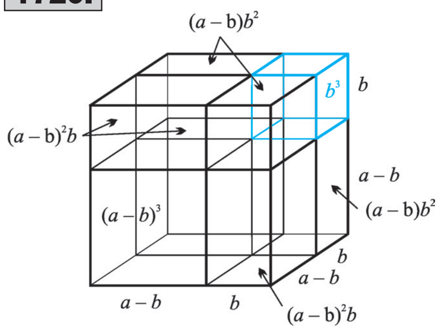
1717.



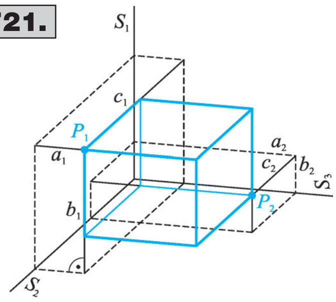
1719.



1720.



1721.



Hasonlóan kiszámítható a többi él és a hozzá kitérő lapátló távolsága: $\underline{\underline{\dfrac{bc}{\sqrt{b^2+c^2}}}}$, illetve $\underline{\underline{\dfrac{ac}{\sqrt{a^2+c^2}}}}$.

1716. Tekintsük az 1715. ábrán a BH testátlót. $HAB\sphericalangle = \llcorner$ és $HDB\sphericalangle = \llcorner$. Alkalmazzuk Pitagorasz tételét az BDH és ABD derékszögű háromszögekre: $BH^2 = DH^2 + DB^2$ és $DB^2 = AD^2 + AB^2 \Rightarrow \underline{\underline{BH^2}} = DH^2 + AD^2 + AB^2 = \underline{\underline{BF^2 + BC^2 + BA^2}}$.

1717. Felhasználjuk, hogy az a, b, c élű téglatest testátlója $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ hosszú, valamint egy lapátló, egy testátló és egy él derékszögű háromszöget határoz meg.

$$\cos\alpha = \frac{AB}{BH} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \quad \cos\beta = \frac{BC}{BH} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{BF}{BH} = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{b^2}{a^2+b^2+c^2} + \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} = 1.$$

1718. $t = \underline{\underline{a\sqrt{b^2+c^2}}}$.

1719. Tekintsünk egy $(a+b)$ élhosszúságú kockát! Ha a lapjaitól a távolságra párhuzamos síkokat fektetünk az ábra szerint, akkor egy a élű és egy b élű kockát, 3 db a, a, b élű és 3 db a, b, b élű négyzetes hasábot kapunk. Ezek térfogatának összege az eredeti kocka térfogatával egyenlő: $V = (a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$.

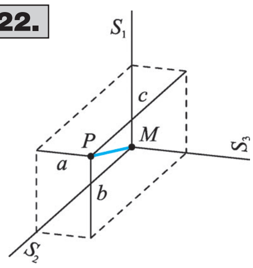
1720. Tekintsünk egy a élhosszúságú kockát! Ha a lapjaitól b távolságra párhuzamos síkokat fektetünk az ábra szerint, akkor egy $(a-b)$ élű és egy b élű kockát, 3 db $(a-b)$, $(a-b)$, b élű és 3 db $(a-b)$, b, b élű négyzetes hasábot kapunk. Ezek térfogatának összege az eredeti kocka térfogatával egyenlő: $V = a^3 = (a-b)^3 + b^3 + 3(a-b)^2\cdot b + 3(a-b)\cdot b^2 \Rightarrow (a-b)^3 = a^3 - [b^3 + 3(a-b)^2\cdot b + 3(a-b)\cdot b^2] = a^3 - [b^3 + 3a^2b - 3ab^2] \Rightarrow (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$.

1721. P_1P_2 a téglatest testátlója. A téglatest élei $|a_1 - a_2|$, $|b_1 - b_2|$, $|c_1 - c_2|$ hosszúak. Ha $a_1 = a_2$, vagy $b_1 = b_2$, vagy $c_1 = c_2$, akkor nincs ilyen téglatest.

$$\underline{\underline{d(P_1;P_2) = \sqrt{(a_1-a_2)^2 + (b_1-b_2)^2 + (c_1-c_2)^2}}}.$$

1722. A P pontot tekinthetjük egy olyan téglatest csúcsának, amelynek élei a, b, c hosszúságúak és három lapja egy-egy síkra illeszkedik. A keresett távolság a téglatest testátlójának hossza: $PM = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

1722.



II

1723. $x = a \cdot \sqrt[3]{\dfrac{V}{abc}} = \sqrt[3]{\dfrac{a^2V}{bc}}$; $y = b \cdot \sqrt[3]{\dfrac{V}{abc}} = \sqrt[3]{\dfrac{b^2V}{ac}}$;

$z = c \cdot \sqrt[3]{\dfrac{V}{abc}} = \sqrt[3]{\dfrac{c^2V}{ab}}$.

1724. *a)* $e \approx 6{,}2$ dm; $A = 73{,}92\ \text{dm}^2$; $V = 42{,}336\ \text{dm}^3$. *b)* $e \approx 48{,}82$ cm; $A = 4291{,}4\ \text{cm}^2$; $V = 18\,018\ \text{cm}^3$. *c)* $e \approx 547$ m; $A = 384\,728\ \text{m}^2$; $V = 13\,043\,808\ \text{m}^3$.

1725. A téglatest éleinek hossza (kerekítve): 1,3 dm; 2,6 dm; 3,9 dm.

1726. Egy tégla térfogata $V_o = 25 \cdot 12 \cdot 6{,}5 = 1950\ \text{cm}^3$. 1 m^3 agyagból a térfogatvesztés után 980 dm^3 = 980 000 cm^3 marad. Ebből 980 000 : 1950 = 502,6 alapján 502 db tégla készülhet.

1727. A 39 cm-es vastagságot $6 \cdot 6{,}5$ cm = 39 cm miatt 6 db téglával tölthetjük ki. A 4 m-es hosszúságot $16 \cdot 25$ cm = 400 cm = 4 m miatt 16 db téglával, a 2,4 m-es magasságot $20 \cdot 12$ cm = = 240 cm = 2,4 m miatt 20 téglával érhetjük el. Összesen $6 \cdot 16 \cdot 20 = 1920$ db tégla szükséges.

1728. A mész térfogata: $V = 3{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot 2 = 17{,}5\ \text{m}^3$. A mész tömege: $m = 17{,}5 \cdot 400 = 7000$ kg.

1729. $x \approx 0{,}000\,27$ cm a lap vastagsága.

1730. Legyen a hasáb alapéle a, oldaléle b. $\Rightarrow$ Az alaplap átlója $a\sqrt{2} = b$. Az átlós síkmetszet területe $b^2 = 283\ \text{cm}^2 \Rightarrow b \approx 16{,}82\ \text{cm} \Rightarrow a\sqrt{2} = 16{,}82 \Rightarrow a \approx 11{,}9$ cm. A négyzetes oszlop térfogata $V = a \cdot a \cdot b = 11{,}9^2 \cdot 16{,}82 = 2380\ \text{cm}^3$.

1731. Legyen a négyzetes oszlop alapéle a, oldaléle b. $\Rightarrow$ Az alaplap átlója $a\sqrt{2}$. Az átlós síkmetszet területe $b \cdot a\sqrt{2} = 116{,}8. \Rightarrow ab \approx 82{,}6$. A test térfogata: $a \cdot a \cdot b = 627{,}4$, azaz $a \cdot 82{,}6 = 627{,}4 \Rightarrow a \approx 7{,}6$ cm és $b \approx 10{,}87$ cm.

1732. Az átlós síkmetszetek téglalapok, oldalaik a téglatest megfelelő élei és lapátlói. A szokásos jelöléssel: $t_{ABGH} = a \cdot \sqrt{b^2+c^2} = 32$ és $t_{BCHE} = b \cdot \sqrt{a^2+c^2} = 43{,}5$ és $t_{ACGE} = c \cdot \sqrt{a^2+b^2} = 52$. $a^2 \cdot (b^2+c^2) = 1024$ és $b^2 \cdot (a^2+c^2) = 1892{,}25$ és $c^2 \cdot (a^2+b^2) = 2704 \Rightarrow c^2 \cdot (b^2-a^2) = 868{,}25$ és $c^2 \cdot (a^2+b^2) = 2704 \Rightarrow c^2 \cdot 2b^2 = 3572{,}25 \Rightarrow cb = 42{,}26 \Rightarrow ab = 10{,}3$ és $ac = 30{,}3 \Rightarrow cb \cdot ab \cdot ac = (abc)^2 = V^2 \Rightarrow V = 114{,}84\ \text{cm}^3$.

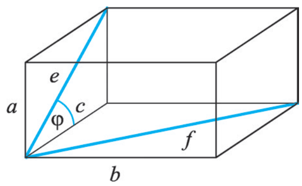
1733. Az átlós síkmetszet négyzet $\Rightarrow$ az egyik lapátló is 7 dm vagy 11 dm. Pitagorasz tétele miatt $e^2 = 7^2 + c^2$ vagy $e^2 = 11^2 + c^2 \Rightarrow e > 7$. A 11 cm-es oldalra illeszkedik az átlós metszet. $c^2 = b^2 - a^2 \Rightarrow b = 11$ cm, $a = 7$ cm, $c = 6\sqrt{2}$ cm.

$A = 2 \cdot (ab + bc + ac) = 2 \cdot (77 + 66\sqrt{2} + 42\sqrt{2}) = 154 + 216\sqrt{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow A \approx 459{,}5\ \text{cm}^2$. $V = abc = 462\sqrt{2}\ \text{cm}^3 \approx 653{,}4\ \text{cm}^3$.

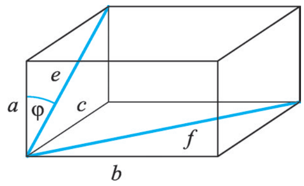
1734. $c = 21$ cm; $a = 11$ cm; $b = 5$ cm.

1735. **1. eset:** $e = 52$ cm, $\varphi = 22°37'$, $f = 101$ m. $c = e \cdot \cos\varphi \approx 48$ m és $a = e \cdot \sin\varphi \approx 20$ m. Pitagorasz-tétel: $f^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = f^2 - c^2 \Rightarrow b \approx 88{,}9$ m. $V = abc \approx 85\,310\ \text{m}^3$.

1735/I.



1735/II.



2. eset: $e = 52$ cm, $\varphi = 22°37'$, $f = 101$ m. $c = e \cdot \sin\varphi \approx 20$ m és $a = e \cdot \cos\varphi \approx 48$ m. Pitagorasz tétele: $f^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow b^2 = f^2 - c^2 \Rightarrow b \approx 99$ m. $V = abc \approx \underline{\underline{95\,040\ \text{m}^3}}$.

1736. $a \approx \underline{\underline{13{,}8\ \text{cm}}}$; $b \approx \underline{\underline{18{,}4\ \text{cm}}}$; $c \approx \underline{\underline{23\ \text{cm}}}$.

1737. $a \approx \underline{\underline{10{,}36\ \text{cm}}}$; $b \approx \underline{\underline{15{,}54\ \text{cm}}}$; $c \approx \underline{\underline{20{,}72\ \text{cm}}}$.

1738. $a \approx \underline{\underline{11{,}84\ \text{cm}}}$; $b \approx \underline{\underline{14{,}8\ \text{cm}}}$; $c \approx \underline{\underline{11{,}76\ \text{cm}}}$.

1739. $b^2 = 16\ \text{m}^2 \Rightarrow b = 4$ m és $a : b = 3 : 4 \Rightarrow a = 3$ m. Pitagorasz-tétel: $b^2 = a^2 + c^2 \Rightarrow c^2 = b^2 - a^2 \Rightarrow c = \sqrt{7}$ m. $A = 2 \cdot (ab + bc + ac) = 2 \cdot \left(12 + 4\sqrt{7} + 3\sqrt{7}\right) = 24 + 14\sqrt{7} \Rightarrow A \approx \underline{\underline{61\ \text{cm}^2}}$. $V = abc = 12\sqrt{7}\ \text{m}^3 \approx \underline{\underline{31{,}75\ \text{m}^3}}$.

1740. $a = \underline{\underline{3\frac{1}{15}}}$; $b = \underline{\underline{9\frac{1}{5}}}$; $c = \underline{\underline{15\frac{1}{3}}}$.

1741. A kocka éle a, a téglatest élei a; $a - 6$; $a - 4$. $a^3 = a(a-6)(a-4) + 2059{,}2 \Rightarrow a^3 = a^3 - 10a^2 + 24a + 2059{,}2 \Rightarrow 0 = 10a^2 - 24a - 2059{,}2 \Rightarrow a_1 < 0$ (ez nem lehet egy szakasz hossza); $a_2 = 15{,}6 \Rightarrow$ A téglatest élei $\underline{\underline{15{,}6\ \text{cm}}}$; $\underline{\underline{9{,}6\ \text{cm}}}$ és $\underline{\underline{11{,}6\ \text{cm}}}$ hosszúak.

1742. $ab : bc : ca = 16 : 21 : 28$. $\frac{ab}{bc} = \frac{a}{c} = \frac{16}{21} \Rightarrow a = \frac{16}{21}c$ és $\frac{ab}{ca} = \frac{b}{c} = \frac{16}{28} \Rightarrow b = \frac{16}{28}c$; $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = 29$ cm. $\frac{256}{441}c^2 + \frac{256}{784}c^2 + c^2 = 841 \Rightarrow c^2 = 441 \Rightarrow c = \underline{\underline{21\ \text{cm}}}$; $a = \underline{\underline{16\ \text{cm}}}$ $b = \underline{\underline{12\ \text{cm}}}$.

1743. $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$ és $42 = a + b + c \Rightarrow 1764 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = 729 + A \Rightarrow A = \underline{\underline{1035\ \text{cm}^2}}$.

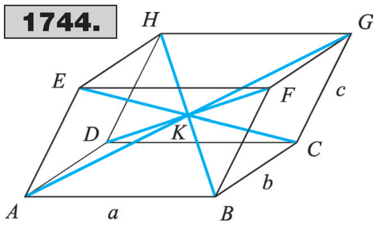
Hasáb

1744. A paralelepipedon szemközti élei párhuzamosak és egyenlők, ezért átlós síkmetszetei paralelogrammák. Az $ABGH$ paralelogramma átlói felezik egymást: $AG \cap BH = K \Rightarrow KA = KG$ és $\underline{KB = KH}$. A $BCHE$ paralelogramma átlói felezik egymást: $CE \cap BH = L \Rightarrow LC = LE$ és $\underline{LB = LH}$. Az aláhúzottakból következik, hogy $L \equiv K$. Hasonlóan belátható, hogy K mindegyik testátlónak felezőpontja, ezért szimmetria-középpont.

1745. Lásd az 1744. feladat megoldását.

1746. Legyen a négyoldalú hasáb alaplapja $ABCD$, fedőlapja $EFGH$! Az AG és BH testátlók metszik egymást, ezért A, B, G és H egy síkban vannak. Az $ABCD$ sík párhuzamos az $EFGH$ síkkal, ezért $AB \parallel GH$. Hasonlóan belátható, hogy minden szemközti élpár párhuzamos egymással, így a test paralelepipedon.

1744.



1747. *a)* A téglatest átlós síkmetszetei téglalapok, amiknek átlói egyben a testátlók. Ezek egyenlők és felezik egymást mind a hat átlós metszetben, így a téglatest testátlói egyenlők.

b) Ha egy paralelepipedon testátlói egyenlők, akkor átlós síkmetszetei olyan paralelogrammák, amiknek átlói egyenlők, vagyis téglalapok. $\Rightarrow$ Élei merőlegesek az éleket nem tartalmazó lapokra. $\Rightarrow$ A paralelepipedon téglatest.